Relación de problemas ejemplo con soluciones de posible inclusión en la PAU en Andalucía para su armonización nacional:

En este documento se propone una relación de problemas tipo con soluciones dirigida al profesorado de la asignatura Tecnología e Ingeniería II con objeto de facilitar la preparación de la PAU para el curso 2025-2026 y siguientes. La relación se ha confeccionado teniendo en cuenta los contenidos y las normas generales elaboradas por la Comisión Estatal de Tecnología e Ingeniería II y aprobadas por la Comisión Coordinadora Interuniversitaria de Andalucía para el curso académico 2025-26 con objeto de armonizar la prueba en todo el territorio español. El documento se estructura en las siguientes secciones:

1) Problemas Competenciales Contextualizados.
2) Problemas de Estructuras.
3) Problemas de Corriente Alterna.
4) Problemas de Sistemas Automáticos.

La primera sección incluye problemas competenciales contextualizados de los bloques de saberes básicos que tradicionalmente más se han preguntado en la PAU en Andalucía. Las siguientes secciones están dedicadas a problemas competenciales (contextualizados o no) sobre contenidos más novedosos, que se incluyeron por primera vez el curso pasado, este curso o en los próximos cursos para ir avanzando hacia la armonización en todo el estado. En la cuarta sección, junto a los enunciados se introducen comentarios que pueden ser útil al profesorado para enseñar a los alumnos estos contenidos que tradicionalmente se han tratado poco en Andalucía. Los problemas incluyen una valoración de la dificultad según lo siguiente: * (dificultad baja), ** (dificultad media) y *** (dificultad alta).

1) Problemas Competenciales Contextualizados

Los problemas competenciales contextualizados suponen problemas competenciales clásicos en un contexto tecnológico que pueda resultar cotidiano para el alumno, que pueda requerir cierta capacidad analítica, que además pueden contener algún dato superfluo, o que no se reflejen directamente en el enunciado y tenga que ser encontrado en esquemas, tablas o gráficas. De acuerdo a la Comisión Estatal para el curso 2025-26 las preguntas competenciales contextualizadas en el ámbito de la materia Tecnología e Ingeniería II requieren enunciados que pueden ser más largos que los de las preguntas competenciales clásicas, y el alumno necesitará más tiempo para su lectura. En Andalucía no se considerarán enunciados que puedan ser excesivamente largos.

En esta sección se proponen problemas Competenciales Contextualizados de los siguientes contenidos:

- Ensayos.
- Máquinas Térmicas.
- Neumática e hidráulica.
- Electrónica Digital.

Problemas Competenciales Contextualizados – Ensayos:

Propuesta de contenidos del bloque B1 de la Comisión Estatal para el curso 2025-26

Bloque B. Preguntas sobre: B1: Propiedades mecánicas y procedimientos de ensayo: tracción, dureza e impacto. i) Ensayo de tracción: descripción del ensayo, curva tensión-deformación (zonas y parámetros característicos: límite elástico, resistencia a la tracción, módulo de Young), Ley de Hooke, concepto de deformación elástica y plástica, concepto de material frágil y material dúctil, concepto de estricción, coeficiente de seguridad y estimación de la tenacidad. ii) Ensayos de dureza: dureza Brinell (descripción del ensayo, cálculo del valor de dureza, constante de ensayo (varios penetradores), designación normalizada); dureza Vickers (descripción del ensayo, penetrador único, cálculo del valor de dureza y designación normalizada). iii) Ensayo de resiliencia (ensayo Charpy): finalidad y descripción del ensayo, concepto de sección efectiva, cálculo de la energía absorbida en el choque y la resiliencia.

Problema 1 (**)

En una carpintería metálica han comprado una plancha de acero de dureza Brinell 160 HB 5 650 20 para fabricar la superficie de trabajo de una mesa de carnicería. Posteriormente, el cliente les ha pedido que la mesa tenga el doble de dureza, por lo que deciden aplicarle un temple a la lámina para endurecerla. Para comprobar el efecto que este tratamiento térmico ha tenido en las propiedades de la plancha, realizan varios ensayos de dureza Brinell en la plancha antes y después del temple. Ayuda al operario que realiza los ensayos a analizar los resultados contestando las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es la profundidad y el diámetro de la huella que deja el ensayo normalizado en la plancha original?

b) Cuando el temple haya aumentado al doble la dureza de la plancha, ¿qué fuerza habrá que aplicar al acero templado para que el ensayo de dureza Brinell deje una huella igual que en el acero sin templar?

Solución

a) Los valores de dureza Brinell en Kp/mm^2 se dan seguidos del diámetro de la bola (D) en mm, la fuerza aplicada (F) en kp y el tiempo de aplicación de la fuerza en segundos

$$HB = \frac{F}{S} \qquad S = \pi \cdot D \cdot f$$

Despejando la profundidad de la huella:

$$f = \frac{F}{\pi \cdot D \cdot HB} = \frac{650\ kp}{\pi \cdot 5\ mm \cdot 160\ kp/mm^2} = 0{,}259\ mm$$

Para el diámetro:

$$HB = \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2})} \qquad (D - \sqrt{D^2 - d^2}) = \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB} \qquad \sqrt{D^2 - d^2} = D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}$$

$$D^2 - d^2 = \left(D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}\right)^2 \qquad d^2 = D^2 - \left(D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}\right)^2$$

$$d = \sqrt{D^2 - \left(D - \frac{2\,F}{\pi \cdot D \cdot HB}\right)^2} = \sqrt{5^2 - \left(5 - \frac{2 \cdot 650}{\pi \cdot 5 \cdot 160}\right)^2} = 2{,}283\ mm$$

b) Misma huella, entonces misma S.

$$HB = \frac{F}{S} \qquad S = \frac{F}{HB} = \frac{650}{160} = 4{,}0625\ mm^2$$

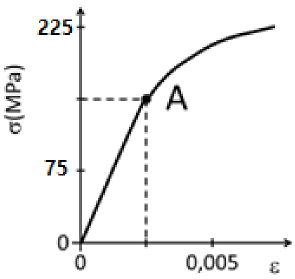
$$HB_{Templado} = 2\ HB = 2 \cdot 160 = 320\ kp/mm^2$$

$$F_{Templado} = HB \cdot S = 320 \cdot 4{,}0625 = 1\,300\ kp$$

Problema 2 (*)

En un ensayo de tracción efectuado a una probeta cilíndrica de un aluminio que se usará para la fabricación del cuadro de bicicletas, se ha obtenido el diagrama tensión-deformación representado en la figura de la derecha, donde el punto A señala el límite elástico. Determinar:

a) El módulo de elasticidad.
b) El alargamiento de la probeta si se aplica una carga de 20 000 N, sabiendo que su diámetro es 25 mm y su longitud 75 mm.
c) La carga máxima que soporta esta probeta sin deformarse permanentemente.



Solución

a) Del diagrama tensión-deformación, a un valor de 150 MPa le corresponde una deformación de 0,0025. Por tanto, el módulo de elasticidad se puede calcular como:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{150\ MPa}{0{,}0025} = 60\ 000\ MPa = 60\ GPa = 60 \cdot 10^9\ \frac{N}{m^2}$$

b) Para calcular el alargamiento, primero se calcula la sección de la probeta:

$$A_0 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{D^2}{4} = 490{,}87\ mm^2 = 490{,}87 \cdot 10^{-6}\ m^2$$

para poder calcular la tensión unitaria:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{20\ 000\ N}{490{,}87 \cdot 10^{-6}\ m^2} = 40{,}74 \cdot 10^6\ \frac{N}{m^2}$$

y el alargamiento unitario:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{40{,}74 \cdot 10^6\ \frac{N}{m^2}}{60\ 000 \cdot 10^6\ \frac{N}{m^2}} = 6{,}79 \cdot 10^{-4}$$

Por último, se calcula el alargamiento de la probeta:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0 = 6{,}79 \cdot 10^{-4} \cdot 75\ mm = 0{,}051\ mm$$

c) La carga máxima que puede soportar la probeta sin deformarse será la que tenga para una tensión igual al límite elástico:

$$F = \sigma_E \cdot A_0 = 150\ MPa \cdot 490{,}87\ mm^2 = 73{,}63 \cdot 10^3 N = 73{,}63\ kN$$

Problema 3 (**)

En un laboratorio se realiza un ensayo de dureza Brinell y otro de dureza Vickers a una misma muestra de acero que se utilizará para la fabricación de rastrillos de jardinería. Se pide.

a) Determinar la expresión normalizada de la dureza Vickers si en el ensayo se emplea una punta piramidal aplicando una carga de 120 kp durante 10 segundos y se obtiene como resultado una huella con diagonales de 1,25 mm y 1,23 mm.

b) Determinar la expresión normalizada de la dureza Brinell si en el ensayo se obtiene una huella de 2,5 mm de diámetro aplicando una carga de 725 kp con un penetrador de 5 mm de diámetro durante 20 segundos.

c) A la vista de los datos y el resultado del ensayo de la dureza Brinell, ¿se puede considerar válido dicho resultado?

Solución

a)

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{1{,}25\ mm + 1{,}23\ mm}{2} \rightarrow d = 1{,}24\ mm$$

$$HV = \frac{F}{A} = \frac{1{,}854 \cdot F}{d^2} = \frac{1{,}854 \cdot 120\ Kp}{(1{,}24\ mm)^2} = 144{,}69\ kp/mm^2 \rightarrow HV = 145\ \frac{kp}{mm^2}$$

La expresión normalizada de la dureza Vickers será:

$$145\ \ HV\ \ 120$$

b)

$$HB = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi D f} = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} = \frac{2 \cdot 725\ kp}{\pi \cdot 5mm\left(5mm - \sqrt{(5mm)^2 - (2{,}5mm)^2}\right)}$$

$$HB = 137{,}8 = 138\frac{kp}{mm^2}$$

La expresión normalizada de la dureza Brinell será:

$$138\ \ HB\ \ 5\ \ 725\ \ 20$$

c) Para que puedan ser válidos los resultados de un ensayo de dureza Brinell, $\frac{D}{4} \leq d \leq \frac{D}{2}$

En nuestro caso, d=2,5 mm y D= 5 mm, por tanto, sí es válido el resultado, pues $d = \frac{D}{2}$

Problema 4 (**)

La empresa que está haciendo la obra de la estación de autobuses de Almería ha subcontratado a otra empresa que fabrica y monta estructuras metálicas para que haga la cubierta de la zona donde los autobuses se estacionan. Como en esa zona hay riesgo de que algún vehículo impacte con los pilares de la estructura, el proyecto técnico debe contener un estudio de la tenacidad a la fractura de estos pilares. Para hacer este estudio se realizan una serie de ensayos Charpy sacando varias probetas del acero de las vigas que la fábrica ha comprado para hacer la estructura. Se usa un péndulo con una masa de 4 kg que se suelta desde 1 m de altura. Se pide:

a) Calcular la resiliencia del material de la viga si al hacer un ensayo con una probeta de sección es cuadrada de 1,5 cm de lado con una entalla en V de 2 mm profundidad el martillo sube hasta los 60 cm tras el impacto.

b) Si al hacer otra probeta para repetir el ensayo se comete un error en la fabricación y la profundidad de la entalla es de 4 mm, en la misma sección cuadrada ¿a qué altura subirá el péndulo para que la resiliencia sea la misma?

c) Calcular y comparar la energía absorbida en la rotura de la probeta con 2 mm y con 4 mm de profundidad de entalla.

Solución

a) La resiliencia, ρ, es la energía por unidad de área, y para el ensayo Charpy se calcula como:

$$\rho = \frac{m \cdot g \cdot (h_0 - h_f)}{S}$$

donde m es la masa del martillo del péndulo, S la sección de la probeta ensayada (descontando la entalla) y h_0 y h_f son la altura inicial y final del péndulo. Entonces:

$$\rho = \frac{m \cdot g \cdot (h_0 - h_f)}{S} = \frac{4\,kg \cdot\ 9{,}81\,m/s^2 \cdot (1-0{,}6)m}{(0{,}015 \cdot 0{,}013)m^2} = 80{,}6\ \cdot 10^3\,J/m^2$$

b) Si la entalla es de 4 mm, el lado de la sección que contiene la entalla tiene una longitud $l = 15 - 4 = 11\,mm$, Entonces $S = 0{,}015 \cdot 0{,}011 = 1{,}65 \cdot 10^{-4} m^2$ y la altura buscada es:

$$h_f = h_0 - \frac{\rho \cdot S}{m \cdot g} = 1\,m - \frac{80{,}6\ \cdot 10^3 \frac{J}{m^2} \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-4} m^2}{4\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2}} = 0{,}63\,m = 63\,cm$$

c) La energía absorbida en la primera probeta es:

$$E_P^1 = m \cdot g \cdot \left(h_0 - h_f\right) = 4\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot (1 - 0{,}6)m = 15{,}7\,J$$

Y en la segunda:

$$E_P^2 = m \cdot g \cdot \left(h_0 - h_f\right) = 4\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot (1 - 0{,}63)m = 14{,}5188\,J$$

Comparación: $\frac{E_P^1}{E_P^2} = 1{,}18$ La energía absorbida en la probeta con la entalla menor, que tiene una sección mayor, es 1,18 veces mayor que la absorbida en la probeta con la entalla mayor.

Problema 5 (**)

En un almacén de envasado de fruta tienen una carretilla transportadora con capacidad para 6 cajas. El dueño del almacén ha detectado que la productividad mejoraría si tuvieran una carretilla para transportar 10 cajas, y encarga un proyecto para modificar la plataforma de la carretilla. El proyectista decide usar barras de acero de sección cuadrada de 2,5 cm de lado y 1 m de longitud, pero para el cálculo de la estructura necesita conocer las propiedades mecánicas del material y realiza un ensayo de tracción. Observa que con una fuerza mayor de 127 kN la barra deja de recuperar su longitud inicial tras el ensayo, pasando del régimen elástico al plástico, y para esta carga su longitud aumenta 0,96 mm. También ha visto que la barra se rompe cuando se le aplica una fuerza de 362 kN. Ayuda al proyectista a calcular los siguientes parámetros mecánicos:

a) El módulo elástico del material.
b) La deformación unitaria cuando se le aplica una fuerza de 48 kN.
c) La tensión de rotura.

Solución

a) El límite elástico es la tensión correspondiente a 127 kN

$$\sigma_Y = \frac{F}{S} = \frac{127 \cdot 10^3 N}{25^2 mm^2} = 203{,}2\,N/mm^2 = 203{,}2\,MPa$$

La deformación en ese punto es:

$$\varepsilon = \frac{l_f - l_0}{l_0} = \frac{0,96}{1\,000} = 0,00096$$

Por lo tanto, aplicando la ley de Hooke:

$$E = \frac{\sigma_Y}{\varepsilon} = \frac{203,2\ N/mm^2}{0,00096} = 211\,666,7\ N/mm^2$$

b) Calculamos la tensión, comprobamos que está en la parte lineal y aplicamos la Ley de Hooke:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{48 \cdot 10^3 N}{25^2 mm^2} = 76,8\ N/mm^2$$

menor que σ_Y, entonces:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{76,8\ N/mm^2}{211\,666,7\ N/mm^2} = 3,63 \cdot 10^{-4}$$

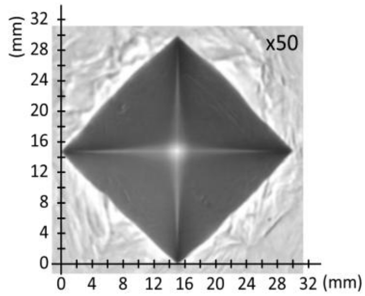
c) Aplicamos la definición de tensión:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{362 \cdot 10^3 N}{25^2 mm^2} = 579,2\ N/mm^2$$

Problema 6 (*)

Para medir la dureza de una plancha de acero se realiza un ensayo Vickers aplicando una carga de 40 kp durante 20 s, obteniéndose la huella de la figura.

a) Si la imagen está aumentada 50 veces, ¿cuánto mide la diagonal de la huella que se necesita para calcular la dureza Vickers?
b) Calcular la dureza Vickers de la plancha y escribir su valor normalizado.



Solución

a) En la figura d_1 = 30 mm y d_2 = 30 mm.

La diagonal para calcular la dureza es el promedio de las dos diagonales: $d = \frac{d_1+d_2}{2} = 30\ mm.$

Según el enunciado, la imagen está aumentada 50 veces, entonces la huella real medirá

$$d = \frac{30\ mm}{50} = 0,6\ mm$$

b) Aplicando la definición de la dureza Vickers

$$HV = \frac{1,854 \cdot F}{d^2} = \frac{1,854 \cdot 40}{0,6^2} = 206\ kp/mm^2$$ 206 HV 40

Problemas Competenciales Contextualizados – Máquinas Térmicas:

Propuesta de contenidos del bloque C2 de la Comisión Estatal para el curso 2025-26

Bloque C. Preguntas sobre: C2: i) Ciclos termodinámicos. Máquinas térmicas, frigoríficas y bombas de calor. Ciclo de Carnot. Cálculos relacionados con el rendimiento, el calor absorbido y cedido, y el trabajo realizado por la máquina; ii) Motores térmicos: potencia, par motor, cilindrada, carrera, volumen de la cámara de combustión, energía útil, consumo, eficiencia y rendimiento.

Problema 1 (**)

Un fabricante de coches está pensando en cambiar el motor de uno de sus vehículos. Para ello, está comprobando el prototipo de un nuevo motor de combustión de 4T en un banco de pruebas, obteniéndose los siguientes resultados:

- Consumo de combustible: 9,5 l / h.
- Par obtenido: 110 N·m.
- Régimen de giro: 2 750 rpm.
- Densidad del combustible: 0,8 kg / dm^3.
- Poder calorífico del combustible: 41 700 kJ / kg.

Partiendo de los datos anteriores, calcular:

a) La potencia que está suministrando el motor y el consumo específico expresado en g / kW·h.

b) El rendimiento.

Solución

a) Datos: G: Consumo. G = 9,5 l / h   M: Par. M = 110 N·m   w : Velocidad angular. w = 2 750 rpm P_U : Potencia útil.

Se calcula la potencia a partir del par obtenido y de la velocidad angular:

$$P_U = M \cdot w = 110\ N \cdot m \cdot 2\,750 \frac{rev}{min} \cdot 2\pi \frac{rad}{rev} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} = 31\,677{,}73\ W \rightarrow\ P_U = 31\,677{,}73\ W$$

El consumo específico se obtiene relacionando el consumo y la potencia útil:

$$G_{PE} = \frac{G}{P_U} = \frac{9{,}5 \frac{l}{h} \cdot 0{,}8 \frac{kg}{dm^3}}{31\,677{,}73\ W} \cdot \frac{1\ dm^3}{1\ l} \cdot \frac{10^3\ g}{1\ kg} \cdot \frac{10^3\ W}{1\ kW} = 239{,}92 \frac{g}{h \cdot kW} \rightarrow\ G_{PE} = 239{,}92 \frac{g}{h \cdot kW}$$

d: densidad. d = 0,8 kg / dm^3

b) En primer lugar, se calcula la potencia aportada mediante la siguiente expresión:

$$P_{AP} = G \cdot P_C \cdot d = 9{,}5 \frac{l}{h} \cdot 41\,700 \frac{kJ}{kg} \cdot 0{,}8 \frac{kg}{dm^3} \cdot \frac{1\ dm^3}{1\ l} \cdot \frac{10^3\ J}{1\ kJ} \cdot \frac{1\ h}{3\,600\ s} \cdot \frac{1\ W}{1\ \frac{J}{s}} = 88\,033{,}33\ W$$

P_{AP} : Potencia aportada. P_C : Poder calorífico. P_C = 41 700 kJ / kg.

Se obtiene el valor del rendimiento η a partir de la potencia útil y la potencia aportada (P_{AP}):

$$\eta = \frac{P_U}{P_{AP}} = \frac{31\,677{,}73\ W}{88\,033{,}33\ W} = 0{,}3598 \rightarrow\ \eta = 35{,}98\%$$

Problema 2 (*)

Se realiza un viaje de Córdoba a Sevilla en quad en el que se recorren 150 km, circulando a una velocidad de 75 km/h. El quad tiene un motor Otto bicilíndrico de cuatro tiempos. Los parámetros del motor son: cilindrada 500 cm^3, diámetro del cilindro 60 mm, relación de compresión 10:1. La potencia máxima se obtiene con un par de 30 Nm a 5 000 rpm. Calcular:

a) La carrera del cilindro y el volumen de la cámara de combustión.
b) El trabajo desarrollado en el viaje, suponiendo que el motor trabaja a potencia máxima todo el trayecto.

Solución

a) Para calcular L, se calcula la cilindrada unitaria a partir de la cilindrada del motor.

$$V_T = Z \cdot V_u \rightarrow V_u = \frac{V_T}{Z} = \frac{500\ cm^3}{2} = 250\ cm^3$$

$$V_u = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot L \rightarrow L = \frac{4 \cdot V_u}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 250\ cm^3}{\pi \cdot 6^2\ cm^2} = 8{,}84\ cm \rightarrow L = 8{,}84\ cm$$

Conocida la cilindrada unitaria, para calcular Vcc, se aplica la definición de R_c

$$R_c = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{V_u + V_{cc}}{V_{cc}} \rightarrow V_{cc} \cdot R_c = V_u + V_{cc} \rightarrow V_{cc} \cdot (R_c - 1) = V_u \rightarrow V_{cc} = \frac{V_u}{R_c - 1}$$

$$V_{cc} = \frac{V_u}{R_c - 1} = \frac{250\ cm^3}{10 - 1} = 27{,}78\ cm^3 \quad \rightarrow V_{cc} = 27{,}78\ cm^3$$

b) Primero se calcula el trabajo desarrollado en un minuto a la potencia máxima a partir de la relación en M y P,

$$P_{máx} = M \cdot \omega$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}\ y\ siendo\ n = 5\ 000\ rpm$$

$$P_{máx} = M \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = 30\ Nm \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot 5\ 000\ rpm}{60\ s} = 15\ 708\ W$$

Conocida la potencia, el trabajo desarrollado en dos horas de viaje:

$$W = P \cdot t = 15\ 708\ W \cdot 7{,}200\ s = 113\ 097{,}600\ J \approx 113{,}1\ MJ$$

Problema 3 (*)

Se quiere climatizar un hotel de un pueblo de Málaga y se está valorando utilizar un sistema con bomba de calor. Se quiere mantener la temperatura de las habitaciones a 24 ºC mientras que en el exterior la temperatura es de 6 ºC. Se elige una bomba de calor cuya eficiencia es la tercera parte de la ideal y que deberá aportar 90 000 J en un minuto al foco caliente. Calcular:

a) La eficiencia real de la bomba de calor y el trabajo aplicado al sistema para su funcionamiento en una hora.
b) La cantidad de calor que se extrae del foco frío en un minuto y la potencia calorífica, expresada en kW.

Solución

a)

$$T_C = 273 + 24 = 297\ K$$

$$T_F = 273 + 6 = 279\ K$$

Se calcula la eficiencia de la bomba de calor ideal.

$$\varepsilon_{BCi} = \frac{Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_C - Q_F} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{297\ K}{297\ K - 279\ K} = 16{,}5$$

Obtenida la Eficiencia ideal, se halla la real, acorde a los datos del problema

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\varepsilon_{BCi}}{3} = \frac{16{,}5}{3} = 5{,}5 \ \rightarrow \varepsilon_{BC} = 5{,}5$$

Se aplica la definición de Eficiencia de una bomba de calor.

$$\varepsilon_{BC} = \frac{Q_C}{W} \rightarrow W = \frac{Q_C}{\varepsilon_{BC}} = \frac{90\,000\,J}{5{,}5} = 16\,363{,}64\,J\ en\ 1\ minuto$$

$$W_{1h} = \ 16\,363{,}64 \ \ J \cdot 60 = \rightarrow W_{1h} = 981{,}82 \ \ kJ$$

b) Se realiza el balance de energía

$$W = Q_C - Q_F \ \rightarrow Q_F = Q_C - W = 90\,000\,J - 16\,363{,}64 \ \ J = 73\,636{,}36\,J$$

$$Q_F = 73\,636{,}36\,J \ = 17\,599{,}51\,Cal$$

Para obtener la potencia calorífica, se aplica la definición de potencia

$$P_{BC} = \frac{Q_C}{t} = \frac{90\,000\,J}{60\,s} = 1\,500\,W = 1{,}5\,kW \rightarrow P_{BC} = 1{,}5\,kW$$

Problema 4 (*)

Mediante un sistema acondicionador de aire se quiere climatizar un pequeño invernadero para mantener la temperatura interior constante a 25 ºC durante todo el año. La temperatura media del exterior es 10 ºC en invierno y 35 ºC en verano. La eficiencia de la máquina es el 35 % de la ideal y la potencia del compresor es 4 kW. Calcular:

a) La eficiencia de la máquina en invierno y en verano.
b) El calor que extrae del local cada día en verano y el calor que cede al local cada día en invierno, suponiendo 5 horas de funcionamiento diario en ambos casos.

Solución

Datos: P = 4 kW $\varepsilon = 0{,}35 \cdot \varepsilon_R$

INVIERNO: $T_F = 10\ °C \ = \ 273 + 10 = 283\ K$ - $T_C = 25\ °C \ = \ 273 + 25 = 298\ K$

VERANO: $T_F = 25\ °C \ = \ 273 + 25 = 298\ K$ - $T_C = 35\ °C \ = \ 273 + 35 = 308\ K$

a) Calculamos la eficiencia en cada estación teniendo en cuenta que en invierno funcionará como bomba de calor y en verano como máquina frigorífica. Calcularemos primero la ideal y luego aplicaremos el factor correspondiente (35%)

$$\varepsilon_{INV\ ideal} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{298\ K}{298\ K - 283\ K} = 19{,}87$$

$$\varepsilon_{INV\_REAL} = 0{,}35 \cdot \varepsilon_{INV\ ideal} = 6{,}95 \ \rightarrow \ \ \varepsilon_{INV\_REAL} = 6{,}95$$

$$\varepsilon_{VER\ ideal} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{298\ K}{308\ K - 298\ K} = 29{,}8$$

$$\varepsilon_{VER\_REAL} = 0{,}35 \cdot \varepsilon_{VER\ ideal} = 10{,}43 \rightarrow \ \ \varepsilon_{VER\_REAL} = 10{,}43$$

b) Calculamos el trabajo empleado en el tiempo indicado y aplicamos la definición de eficiencia correspondiente en ambas estaciones.

VERANO:

$$\varepsilon_{VER\_REAL} = \frac{Q_F}{W} \quad ; \quad Q_F = W \cdot \varepsilon_{VER\_REAL}$$

$$W = P \cdot t = 4\,kW \cdot 5\,h \cdot \frac{3\,600\,s}{1\,h} \cdot = 7{,}2 \cdot 10^7\,J$$

$$Q_F = 7{,}2 \cdot 10^7\,J \cdot 10{,}43 = 7{,}51 \cdot 10^8\,J \rightarrow \quad Q_F = 7{,}51 \cdot 10^8\,J$$

INVIERNO:

$$\varepsilon_{INV\_REAL} = \frac{Q_C}{W} \quad ; \quad Q_C = W \cdot \varepsilon_{INV\_REAL}$$

$$W = P \cdot T = 4\,kW \cdot 5\,h \cdot \frac{3\,600\,s}{1\,h} = 7{,}2 \cdot 10^7\,J$$

$$Q_C = 7{,}2 \cdot 10^7\,J \cdot 6{,}95 = 5 \cdot 10^8\,J \rightarrow \quad Q_C = 5 \cdot 10^8\,J$$

Problemas Competenciales Contextualizados – Neumática e hidráulica:

Propuesta de contenidos del bloque C3 de la Comisión Estatal para el curso 2025-26

Bloque C. Preguntas sobre C3: *i)* Neumática: Cálculos relacionados con cilindros neumáticos. Fuerza realizada y caudal de aire utilizado. Interpretación de elementos y sistemas neumáticos. ii) Hidráulica: Cálculos relacionados con los principios que fundamentan los circuitos hidráulicos (principio de Pascal, ley de continuidad, principio de Bernoulli).

Problema 1 (**)
Un grupo de ingenieros están decidiendo qué tipo de cilindro neumático elegir para la cadena de montaje de una fábrica de ensamblaje del fuselaje de aviones en la provincia de Cádiz. Necesitan un circuito neumático con un cilindro de doble efecto para ejercer una fuerza de 8.500 N en su carrera de avance para elevar verticalmente determinadas piezas. El fabricante de cilindros les ofrece dos modelos de cilindro distintos, aunque ambos tienen diámetro de émbolo 8 cm, carrera 10 cm y diámetro de vástago 5 cm. En uno de ellos la tensión máxima admisible del material del vástago es de 10 MPa, y en el otro de 1 MPa.

a) ¿Qué modelo de cilindro utilizaría? Justificar la respuesta.
b) Calcular el consumo de aire medido a la presión de trabajo, si efectúa 10 ciclos por minuto y la presión de la red de aire comprimido es de 3 MPa.

Solución
Datos:
- Cilindro de doble efecto
- Diámetro émbolo (D) = 8 cm = 0,08 m
- Diámetro vástago (d) = 5 cm = 0,05 m
- Carrera (L) = 10 cm = 0,10 m
- Fuerza requerida en avance (F) = 8 500 N
- Presión red = 3 MPa
- Material vástago: σ_adm = 10 MPa ó 1 MPa

a) Tipo de cilindro a utilizar. La tensión axial en el vástago por la fuerza transmitida es:

Área del Vástago: $A_V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0{,}05^2)}{4} = \pi \cdot 0{,}000625 = 0{,}0019635\,m^2$

Tensión a soportar por el vástago: $\sigma = \frac{F}{A_V} = \frac{8\,500}{0{,}0019635} N/m^2 = 4{,}33\,MPa$

Comparación de σ (tensión) admitida:

- 1 MPa: insuficiente (4,33 > 1)

- 10 MPa: suficiente (4,33 < 10)

Por tanto, se debe elegir el cilindro con vástago de σ_adm = 10 MPa.

b) Consumo de aire (medido a la presión de trabajo)
En un ciclo completo (avance + retroceso) el volumen comprimido admitido es:

$$V_{AV} = S_e \cdot C = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot C = \frac{\pi \cdot 0{,}08^2}{4} \cdot C = 0{,}0050265 \cdot 0{,}10 = 0{,}00050265\, m^3$$

$$V_{Ret} = (S_e - S_V) \cdot C = \left[\left(\frac{\pi \cdot D_e^2}{4}\right) - \left(\frac{\pi \cdot D_V^2}{4}\right)\right] \cdot C = \left(\frac{\pi \cdot 0{,}08^2}{4} - \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4}\right) \cdot C$$

$$V_{Ret} = (0{,}0050265 - 0{,}00019635) \cdot 0{,}10 = 0{,}00030630\, m^3$$

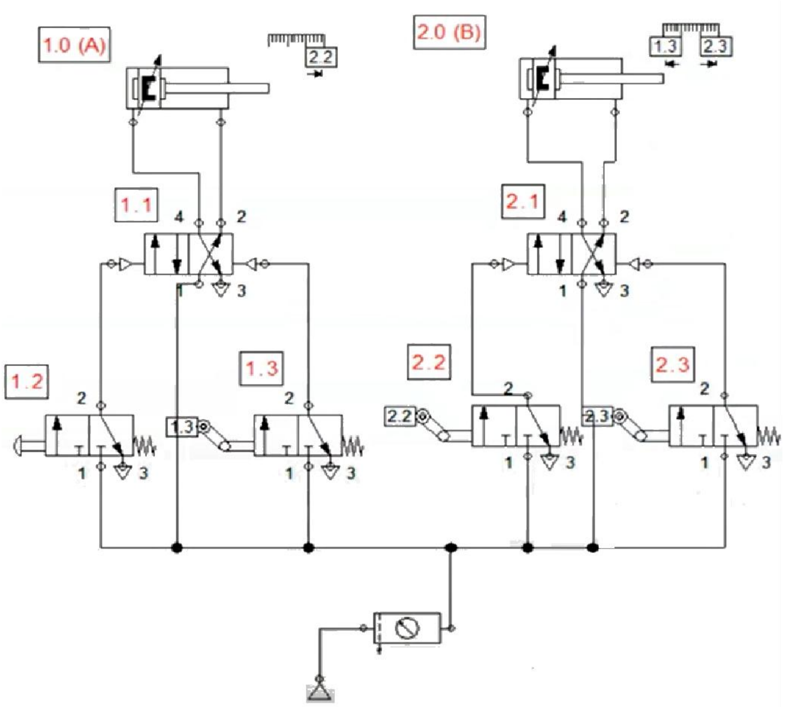
Volumen por ciclo:

$$V_{ciclo} = V_{av} + V_{ret} = (2 \cdot S_e - S_V) \cdot C = 0{,}00050265 + 0{,}00030630 = 0{,}00080896\, m^3$$

A 10 ciclos /min:

$$V_{trab} = V_{ciclo} \cdot 10 = 0{,}00080896\, m^3 \cdot 10 = 0{,}0080896\, \frac{m^3}{min} = 8{,}06\, \frac{L}{min}$$

Problema 2 (***)
En una cadena de montaje de teléfonos móviles de última generación, se ha instalado el circuito neumático de la figura, en el que ambos cilindros son iguales. Se pide:



a) El valor de las fuerzas de avance y retroceso, despreciando las fuerzas de rozamiento, de los cilindros de doble efecto si tienen un émbolo de 5 cm de diámetro, un vástago de 1 cm de diámetro y una carrera de 24 cm. Está alimentado con una presión de 6 kg/cm² (despreciando las fuerzas de rozamiento).
b) Explicar el funcionamiento del esquema de la figura para el mando de dos cilindros de doble efecto.

Solución

a) Datos:

Émbolo: D = 5 cm = 0,05 m

Vástago: d = 1 cm = 0,01 m

Presión: 6 kg/cm² = 6 × 0,0980665 = 0,588399 MPa

Áreas:

$$S_{AV} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} = 1{,}963495 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$S_{Ret} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} - \frac{\pi \cdot 0{,}01^2}{4} = 1{,}963495 \cdot 10^{-3} - 7{,}853982 \cdot 10^{-5} = 1{,}884956 \cdot 10^{-3} m^2$$

La Fuerza se calcula con la expresión $F(N) = p(Pa)xS(m^2)$

- *Fuerza de avance:*

  $F_{AV} = p \cdot S_{Av} = 0{,}588399 \cdot 10^6 \cdot 1{,}963495 \cdot 10^{-3} m^2 = 1\,155{,}3\ N$

- *Fuerza de retroceso:*

  $F_{Ret} = p \cdot S_{Ret} = 0{,}588399 \cdot 10^6 \cdot 1{,}884956 \cdot 10^{-3} m^2 = 1\,109{,}1\ N$

b) El funcionamiento del circuito es el siguiente:

El mando está hecho por una válvula 3/2 de pulsador manual que activa el circuito, con **dos válvulas 4/2 pilotadas neumáticamente** (1.1 para el cilindro A y 2.1 para el cilindro B) y tres **finales de carrera 3/2 mecánicos** 1.3, 2.2, 2.3.

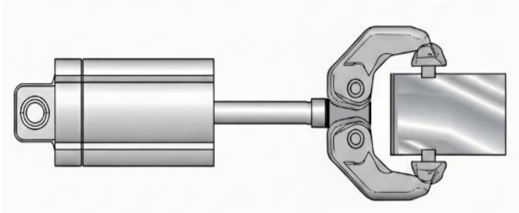
A+ → B+ → A− → B−

donde "+" es avance (extensión) y "−" retroceso (repliegue).

Funcionamiento paso a paso: Estado inicial: ambos cilindros en reposo o replegados (A−, B−). Las 4/2 están en sus posiciones "reposo".

1. **Arranque → A+**
   - Al pulsar 1.2, llega pilotaje a **1.1 lado izquierdo**.
   - 1.1 conmuta y alimenta la cámara anterior de **A**, que **avanza**.
   - Cuando A llega al final de su carrera de avance, se pulsa el FC 2.2 y se activa su válvula 3/2 que envía **señal neumática a la válvula 2.1 lado izquierdo**.
2. **Disparo por fin de A → B+**
   - Con el pilotaje recibido, **2.2** conmuta y alimenta la cámara anterior de **B**, que **avanza**.
   - Al alcanzar su final de carrera delantero, se pulsa 2.3 y la válvula 3/2 correspondiente manda **señal al otro piloto de 2.1, lado derecho**.
3. **Conmutación de B+ a→ B−**
   - 2.1, ha cambiado de posición y alimenta la cámara posterior de B, que **retrocede**.
   - Al llegar B al final de carrera trasero 1.3, su válvula 3/2 envía **señal al piloto opuesto de 1.1 lado derecho**.
4. **Conmutación de A a → A−**
   - 1.1, ha cambiado de posición y alimenta la cámara posterior de A, que **retrocede y su vástago se repliega**.
   - Al terminar A el retroceso, el circuito queda como al inicio, listo para un **nuevo ciclo** con otra orden de arranque cuando se pulse 1.2.

Problema 3 (***)



En una línea de fabricación de chapas de acero, una estación realiza el punzonado de un orificio en cada pieza. La sujeción de la pieza y el expulsado del recorte son neumáticos. Para ello, por el espacio que existe y por las características del punzonado que se debe realizar, los diseñadores de la estación tienen que utilizar un cilindro de doble efecto que tiene 10 cm de diámetro, con una relación de los diámetros del émbolo y vástago de 5. Este cilindro funcionará conectado a una red de aire comprimido a la presión de 2 MPa y tiene que efectuar 15 ciclos por minuto. Se pide:

a) ¿Cuál será la longitud de la carrera del cilindro si el caudal de aire exterior que se debe consumir, medido en condiciones normales, es de 583 l/min?
b) Representar el esquema neumático para el gobierno de un cilindro de doble efecto (C), de manera que cada vez que se oprime un pulsador M, el vástago hace automáticamente la salida y retroceso al llegar al final de su carrera, quedando en espera a que sea pulsado nuevamente el pulsador M.

Solución

a) Para calcular la longitud de la carrera, se debe de conocer el volumen del cilindro, es decir el volumen de aire que se consume en un ciclo. Si se parte del caudal de aire exterior, en condiciones normales (CCNN), que se consumen en un minuto, se debe de tener en cuenta el tiempo que tarda en hacer un ciclo en función de la cadencia (ciclos/minuto) y la presión de la red de aire comprimido. Partiendo de la expresión del caudal en función del volumen y el tiempo se tiene que:

$$Q_{CCNN} = \frac{V_{CCNN}}{t} \quad \rightarrow \quad V_{CCNN} = Q_{CCNN} \cdot t \quad \rightarrow \quad V_{CCNN} = 583 \frac{l}{min} \cdot \frac{1}{15} \frac{min}{ciclo} \quad \rightarrow \quad V_{CCNN} = 38{,}87 \ \frac{l}{ciclo}$$

Una vez calculado el volumen de aire de un ciclo en condiciones normales, procede calcular el volumen del cilindro a la presión de trabajo:

$$\left.\begin{array}{l} p_{ab} = p_{atm} + p_{rel} \\ V_{CCNN} \cdot p_{atm} = p_{ab} \cdot V_C \end{array}\right\} \rightarrow \ V_C = \frac{p_{atm}}{p_{atm}+p_{rel}} \cdot V_{CCNN} \quad \rightarrow \quad V_C = \frac{10^5 \frac{N}{m^2}}{10^5 \frac{N}{m^2} + 2 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}} \cdot 38{,}87 \frac{l}{ciclo} \rightarrow$$

$$V_C = \frac{1}{1+20} \cdot 38{,}87 \frac{l}{ciclo} \quad \rightarrow \quad V_C = 1{,}851 \frac{l}{ciclo} \quad \rightarrow \quad V_C = 1{,}851 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{ciclo}$$

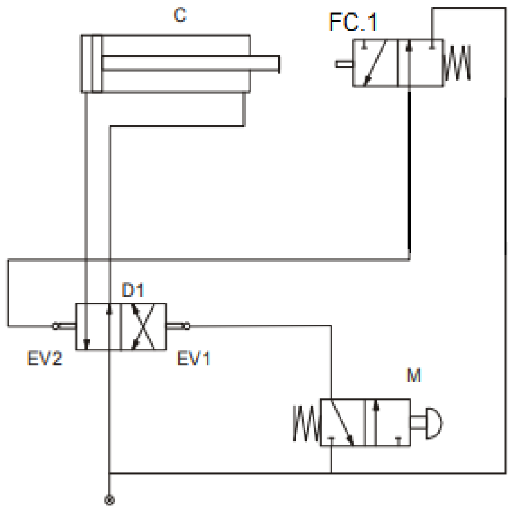
El volumen del cilindro en un ciclo es la suma del volumen de avance y el volumen de retroceso, los cuales se miden en función de la estructura del cilindro, es decir, superficies y carrera:

$$V_C = V_{Av} + V_{Ret} \quad \rightarrow \quad V_C = C \cdot S_{Av} + C \cdot S_{Ret} \quad \rightarrow \quad V_C = C \cdot (S_{Av} + S_{Ret}) \quad \rightarrow \quad C = \frac{V_C}{S_{Av}+S_{Ret}}$$

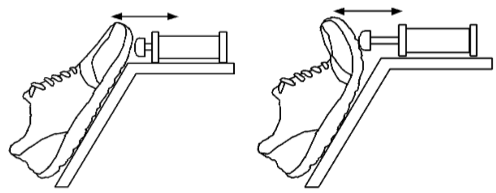
$$C = \frac{V_C}{\frac{\pi}{4} \cdot D_e^2 + \left(\frac{\pi}{4} \cdot D_e^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d_v^2\right)} \quad \rightarrow \quad C = \frac{V_C}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(2 \cdot D_e^2 - d_v^2\right)} \quad \rightarrow \quad C = \frac{V_C}{\frac{\pi}{4} \cdot \left(2 \cdot D_e^2 - d_v^2\right)} \quad \rightarrow$$

$$C = \frac{1{,}85 \cdot 10^{-3} m^3}{\frac{\pi}{4} \cdot (2 \cdot (0{,}1m)^2 - (0{,}02m)^2)} \quad \rightarrow \quad C = 0{,}12m$$ → La carrera del cilindro es 12 cm

b)



Problema 4 (**)



La figura muestra un sistema para comprobar el número de flexiones que soporta un calzado deportivo antes de presentar algún defecto. El cilindro neumático es de simple efecto con retorno por muelle y realiza una secuencia de avance y retroceso de forma continuada. El diámetro del émbolo es 50 mm, su recorrido 120 mm, la fuerza resistente de la zapatilla 100 N y la fuerza del muelle 60 N. Se pide:

a) Presión mínima que ha de tener la red de aire comprimido.
b) Consumo de aire exterior, en condiciones normales, al cabo de un millón de ciclos.

Solución

a) La fuerza F que ha de ejercer el pistón es igual a la de la zapatilla, 100 N, más la del muelle, 60 N, igual a 160 N. Como

$$F = P \cdot S; \;\; P = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{160\ N}{\frac{\pi \cdot (0{,}05 m)^2}{4}}$$

$$= 81\,489\ \frac{N}{m^2} = 81\,489\ \text{Pa} = 0{,}81489\ \text{bar}$$

b) El volumen de aire en un ciclo es

$$V_{un\ ciclo} = A \cdot l = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot l = \frac{\pi (0{,}05\ m)^2}{4} \cdot 0{,}12\ m = 0{,}000235\ m^3$$

Para calcular el volumen en condiciones normales, aplicamos Boyle-Mariotte:

$$P1 \cdot V1 = P2 \cdot V2$$

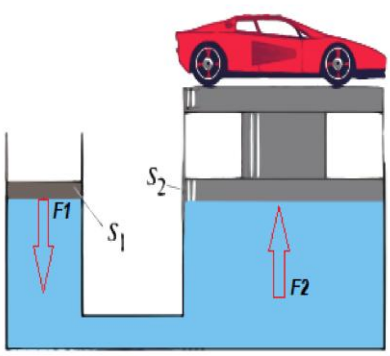
$$V_{cn\_1ciclo} = V_{1ciclo} \frac{P1}{P2} = 0{,}000235\ m^3 \frac{(1 + 0{,}8149)\ bar}{1\ bar} = 0{,}0004276\ m^3$$

Conocido el volumen, calculamos el consumo en un millón de ciclos:

$$V_{cn\_1Mciclos} = V_{cn\_1ciclo} \cdot 1 \cdot 10^6 = 427{,}6\ m^3$$

Problema 5 (*)
En el taller de una fábrica de coches deportivos ligeros hay una prensa hidráulica, como la que se observa en la figura. La prensa se utiliza para elevar los coches y reparar las averías de las partes bajas de los mismos. La sección transversal del émbolo grande (S2) es de 250 cm² y la del pequeño (S1) es 10 cm². Se pide:

a) Si el deportivo ejerce una carga de 12 000 N y se quiere elevar 0,1m, calcular la fuerza que se debe ejercer sobre el émbolo pequeño y el desplazamiento del mismo.
b) En el diseño de otro modelo, los ingenieros quieren introducir nuevos elementos que tienen un mayor peso, ¿Qué cambios realizaría en las dimensiones de la prensa para elevar una carga de 15 000 N, sin modificar la fuerza ejercida sobre el émbolo pequeño del apartado a)?



Solución
a) En la prensa hidráulica se aplica el principio de pascal el cual se establece que "La presión aplicada a un fluido confinado en un recipiente se transmite con igual magnitud en todas las direcciones y en todos los puntos del fluido." Por tanto:

$$p_1 = p_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

1.- Para conocer la fuerza que se debe ejercer sobre el émbolo pequeño para elevar un Ferrari de 12 000 N, se debe de calcular F_1:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \rightarrow F_1 = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_2 \rightarrow F_1 = \frac{10 \cdot 10^{-4} m^2}{250 \cdot 10^{-4} m^2} \cdot 12\,000\,N \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{1}{25} \cdot 12\,000\,N \quad \rightarrow \quad F_1 = 480\,N$$

2.- Para el cálculo del desplazamiento del cilindro pequeño se utilizará la relación de volúmenes de los pistones, en relación con las superficies de los émbolos y el desplazamiento de los mismos en un recipiente con un fluido confinado:

$$V_1 = V_2 \rightarrow S_1 \cdot C_1 = S_2 \cdot C_2 \rightarrow C_1 = \frac{S_2}{S_1} \cdot C_2 \rightarrow C_1 = \frac{250 \cdot 10^{-4} m^2}{10 \cdot 10^{-4} m^2} \cdot 0{,}1\,m \rightarrow C_1 = 2{,}5\,m$$

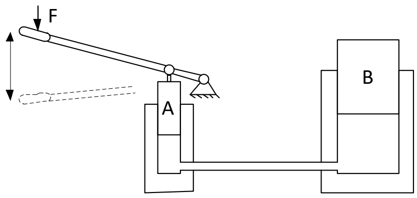
b)

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \rightarrow \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{F_2}{F_1} \quad \rightarrow \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{15\,000 N}{480 N} \quad \rightarrow \quad \frac{S_2}{S_1} = 31{,}25$$ es la relación entre superficies.

Cambiaría la superficie de uno de los émbolos de forma que tuvieran una relación $S_2/S_1 = 31{,}25$.

Problema 6 (**)
La figura muestra un gato hidráulico para elevar vehículos. El pistón B tiene un diámetro de 80 mm y el pistón A es movido manualmente mediante una palanca que multiplica por diez la fuerza F aplicada en su extremo.

a) Calcular el diámetro del pistón A sabiendo que el pistón B eleva una masa de 1000 kg cuando la fuerza F es 100 N.
b) Calcular de nuevo el diámetro del pistón A para que este se desplace 5 cm cuando el pistón B se mueva 1 mm.



Solución
a) La relación entre la fuerza ejercida sobre el pistón *A* y la desarrollada por el pistón *B* es:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{S_A}{S_B} = \frac{\frac{\pi {D_A}^2}{4}}{\frac{\pi {D_B}^2}{4}} = \frac{{D_A}^2}{{D_B}^2} \qquad (1)$$

y como

$$F_A = 10\,F = 10 \cdot 100\,N = 1\,000\,N$$

$$F_B = mg = 1\,000\,kg \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} = 9\,800 N$$

De (1), el diámetro D_A es: $D_A = D_B\sqrt{\frac{F_A}{FB}} = 80\sqrt{\frac{1\,000}{9\,800}} = 25{,}55\ mm$

b) La relación entre las distancias recorridas por los pistones y sus secciones es:

$$\frac{H_A}{H_B} = \frac{S_B}{S_A} = \frac{\pi\frac{D_B{}^2}{4}}{\frac{\pi D_A{}^2}{4}} = \frac{D_B{}^2}{D_A{}^2} \qquad (2)$$

Por tanto, el diámetro de A es en este caso,

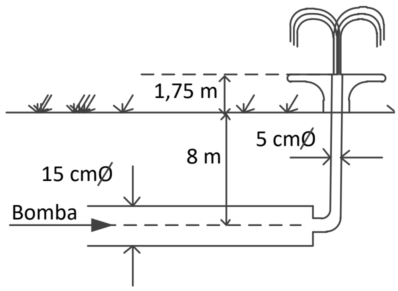
$$D_A = D_B\sqrt{\frac{H_B}{H_A}} = 80\ mm\sqrt{\frac{1\ mm}{50\ mm}} = 11{,}3\ mm$$

Problema 7 (**)

Se desea diseñar una fuente de agua para un hotel. Esta fuente estará alimentada por una tubería cilíndrica de 15 cm de diámetro situada horizontalmente a una profundidad de 8 m bajo el nivel del suelo. Posteriormente, la tubería se curvará hacia arriba, y el agua será expulsada por el extremo de otra tubería cilíndrica de 5 cm de diámetro. Este extremo estará a una altura de 1,75 m por encima del suelo y el agua se proyectará con una velocidad de 12 m/s. Calcular:

a) El caudal de agua cuando esté en funcionamiento.
b) La presión manométrica necesaria en la tubería horizontal.

Dato: densidad agua = 1 000 kg/m^3



Solución

Datos: *D_1= 15 cm = 0,15 m; D_2= 5 cm = 0,05 m; V_{agua}= 12 m/s; d= 1 000 kg/m^3*

Se establece las siguientes referencias:

Punto 1. Cualquier punto de la tubería horizontal. La altura en este punto la tomaremos como 0.

Punto 2. El punto de salida del agua. Altura 9,75 m sobre nuestra referencia.

Los subíndices harán referencia a esos puntos.

a) El caudal vale la sección de la tubería por la velocidad del fluido en dicha sección.

$$\mathrm{A} = \frac{\pi \mathrm{D}^2}{4};$$

$$A_2 = 1{,}9625 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$Q = A_2 \cdot V_2 = 1{,}9625 \cdot 10^{-3}\ m^2 \cdot 12\ m/s = 2{,}355 \cdot 10^{-2}\ m^3/s = 23{,}55\ l/s$$

b) Como el caudal es constante, se calcula la velocidad del agua en la tubería horizontal.

$$A = \frac{\pi D^2}{4}; \quad A_1 = 1{,}76625 \cdot 10^{-2}\ m^2$$

$$Q = A_1 \cdot V_1;$$

$$V_1 = Q/A_1 = 2{,}355 \cdot 10^{-2} / 1{,}76625 \cdot 10^{-2} = 1{,}33\ m/s$$

Aplicando Bernoulli.

$$\rho g h_1 + P_1 + 1/2\ \rho V_1^2 = \rho g h_2 + P_2 + 1/2\ \rho V_2^2;$$

$$h_1 = 0$$

Si tomamos P_2=0, trabajamos con presiones manométricas. h_1=0.

Despejando, $P_1 = \rho g h_2 + 1/2\ \rho V_2^2 - 1/2\ \rho V_1^2 = 166\,665{,}55\ Pa = 1{,}67\ atm$

Problemas Competenciales Contextualizados – Electrónica Digital:

Propuesta de contenidos del bloque D2 de la Comisión Estatal para el curso 2025-26

Bloque D. Preguntas sobre: **D2:** ***i)*** Análisis y diseño de sistemas lógicos combinacionales (obtención de la tabla de verdad, determinación de la función lógica en forma de minterms y maxterms); ***ii)*** Simplificación de la función lógica (método de Karnaugh); ***iii)*** Análisis, diseño e implementación de circuitos con puertas lógicas AND, OR, NOT, NAND y NOR.

Problema 1 (versión 1) (*)
Se dispone de un concentrador de agua de riego (F) al que llegan cuatro tuberías: tubería A, con un caudal de 5 l/min; tubería B, con un caudal de 10 l/min; tubería C, con un caudal de 20 l/min; y tubería D, con un caudal de 30 l/min. Cada tubería tiene un sensor que se activa cuando está pasando agua por la misma. Se desea diseñar un circuito que detecte que al concentrador le llega un caudal superior o igual a 30 l/min. Se pide:

a) Obtener la tabla de verdad del circuito.
b) Obtener la expresión simplificada del circuito.
c) Dibujar el circuito lógico de la expresión simplificada.
d) Razonar (basándose en la fórmula simplificada) si existe alguna entrada que no influya en el comportamiento del circuito.

Solución

a)

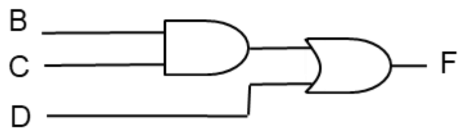
A (5 l/min)	B (10 l/min)	C (20 l/min)	D (30 l/min)	F (>= 30 l/min)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

b)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

F = D + B·C

c)



d) La entrada A no influye en el comportamiento porque no aparece en la fórmula simplificada.

Problema 1 (versión 2) (*)

Se dispone de un concentrador de agua de riego (F) al que llegan cuatro tuberías: tubería A, con un caudal de 5 l/min; tubería B, con un caudal de 10 l/min; tubería C, con un caudal de 20 l/min; y tubería D, con un caudal de 30 l/min. Cada tubería tiene un sensor que se activa cuando está pasando agua por la misma. Se dispone de un circuito lógico con la siguiente tabla de verdad:

A (5 l/min)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
B (10 l/min)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
C (20 l/min)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
D (30 l/min)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
F (>= 30 l/min)	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1

Se pide:

a) Obtener la fórmula simplificada del circuito.
b) Dibujar el circuito lógico de la fórmula simplificada.
c) Razonar (basándose en la fórmula simplificada) si existe alguna entrada que no influya en el comportamiento del circuito.
d) ¿Cuál es el caudal mínimo que detecta el sistema? Justificar su respuesta.

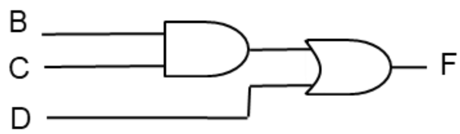
Solución

a)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	1	1	0

$F = D + B\cdot C$

b)



c) La entrada A no influye en el comportamiento porque no aparece en la fórmula simplificada.

d) Los caudales detectados por el sistema son: 30 l/min, 50 l/min, 40 l/min, 60 l/min, 35 l/min, 55 l/min, 45 l/min, 65 l/min. Por lo tanto, el caudal mínimo detectado es 30 l/min.

Problema 2 (*)

En una habitación se utiliza un sistema automatizado para controlar las luces, F, en función de tres entradas:

- Sensor de movimiento M (hay personas en la habitación = “1”, no hay personas = “0”).
- Sensor de luz ambiente L (luz insuficiente = “1”, luz adecuada = “0”).
- Interruptor manual S (encendido manual = “1”, encendido automático = “0”).

Las luces, F, se encenderán si: i) se detecta movimiento y la luz ambiente es insuficiente; ii) el interruptor manual está activado independientemente del resto de condiciones. Se pide:

a) Obtener la tabla de verdad y su función en forma canónica.
b) Simplificar por el método de Karnaugh e implementar la función con puertas NAND.

Solución

a)

	M	L	S	**F**
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

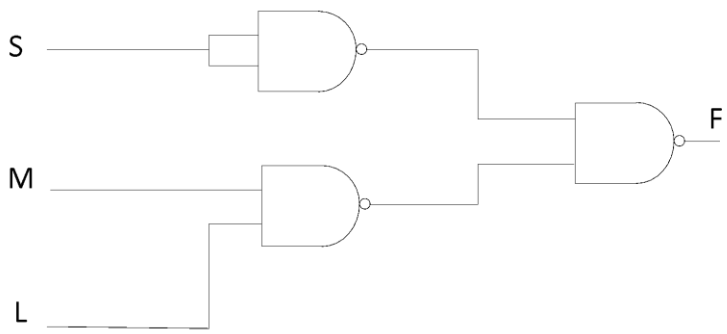
$$F = \underline{ML}S + \underline{M}LS + M\underline{L}S + ML\underline{S} + MLS$$

b)

LS / M	00	01	11	10
0		1	1	
1		1	1	1

$$F = S + \ ML$$

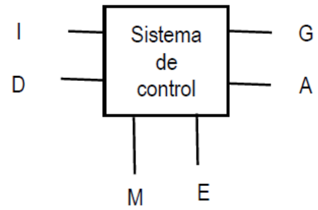
$$F = \underline{\underline{S + ML}} = \underline{S}\ \underline{ML}$$



Problema 3 (*)

El sistema de seguridad de una guillotina para cortar papel tiene una salida (G) para el corte y una salida luminosa (A), de aviso. Consta, además, de dos pulsadores (I) y (D) y dos interruptores (M) y (E). Su funcionamiento es el siguiente:

- Si E está inactivo (E=0), la salida G no se activa en ningún caso (G=0).
- Si E=1 y M=1, la máquina funciona en modo seguro y es preciso que se pulsen simultáneamente ambos pulsadores (I=1; D=1) para que se active la salida (G=1) y se corte el papel.
- Si E=1 y M=0, la guillotina se activa pulsando cualquiera de los dos pulsadores (I o D) o ambos a la vez y, además, se activará la señal de aviso (A=1) para que el operario tenga cuidado durante esa operación.



Se pide:

a) Obtener la tabla de verdad y las funciones canónicas de G y A.
b) Simplificar las funciones G y A por Karnaugh y obtener los correspondientes circuitos lógicos utilizando puertas NAND.

Solución

a)

	E	*M*	*I*	*D*	***G***	***A***
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0
8	1	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1	1
10	1	0	1	0	1	1
11	1	0	1	1	1	1
12	1	1	0	0	0	0
13	1	1	0	1	0	0
14	1	1	1	0	0	0
15	1	1	1	1	1	0

$$G = E\underline{MI}D + E\underline{M}I\underline{D} + E\underline{M}ID + EMID$$

$$A = E\underline{MI}D + E\underline{M}I\underline{D} + E\underline{M}ID$$

b)

Función G

EM \ ID	00	01	11	10
00				
01				
11			1	
10		1	1	1

$$G = EID + E\bar{M}D + E\bar{M}I$$

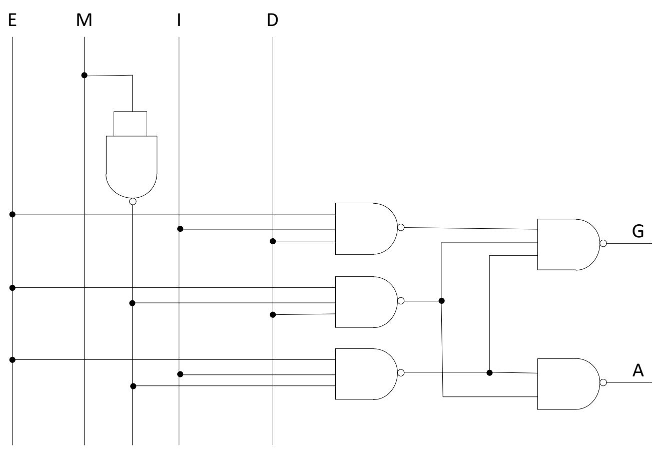
Función A

EM \ ID	00	01	11	10
00				
01				
11				
10		1	1	1

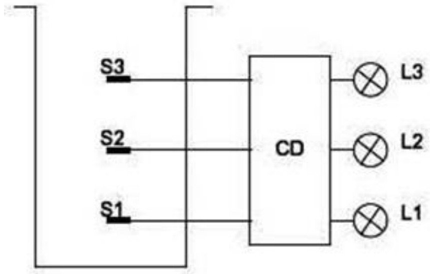
$$A = E\bar{M}D + E\bar{M}I$$

$$G = EID + E\bar{M}D + E\bar{M}I = \overline{\overline{EID + E\bar{M}D + E\bar{M}I}} = \overline{\overline{EID}\;\overline{E\bar{M}D}\;\overline{E\bar{M}I}}$$

$$A = E\bar{M}D + E\bar{M}I = \overline{\overline{E\bar{M}D + E\bar{M}I}} = \overline{\overline{E\bar{M}D}\;\overline{E\bar{M}I}}$$



Problema 4 (*)



En la figura adjunta, CD es un circuito digital que indica el nivel de agua de un depósito con tres leds. Si el líquido no llega a S1, no se enciende ningún led. Cuando el líquido llega a S1 (S1=1), solo se enciende L1 (L1=1); cuando el líquido llega a S2 (S2=1), solo se enciende L2 (L2=1; L1=0); cuando el líquido llega a S3 (S3=1), solo se enciende L3 (L3=1; L2=0; L1=0).

Finalmente, si se da alguna combinación de la que se deduzca un fallo de detección de nivel, se encenderán los tres leds simultáneamente. Se pide:

a) Obtener la tabla de verdad y las funciones canónicas de los tres leds.

b) Simplificar las funciones por Karnaugh y obtener los correspondientes circuitos lógicos con puertas básicas.

Solución

a)

	S_3	S_2	S_1	L_3	L_2	L_1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	1	1
3	0	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0

$$L_1 = \underline{S_3}\,\underline{S_2}S_1 + \underline{S_3}S_2\underline{S_1} + S_3\underline{S_2S_1} + S_3\underline{S_2}S_1 + S_3S_2\underline{S_1}$$

$$L_2 = \underline{S_3}S_2\underline{S_1} + \underline{S_3}S_2S_1 + S_3\underline{S_2S_1} + S_3\underline{S_2}S_1 + S_3S_2\underline{S_1}$$

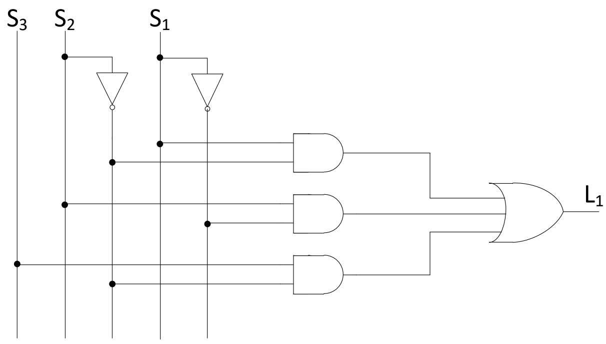
$$L_3 = \underline{S_3}S_2\underline{S_1} + S_3\underline{S_2S_1} + S_3\underline{S_2}S_1 + S_3S_2\underline{S_1} + S_3S_2S_1$$

b)

Función L_1

S_1 \ S_2	00	01	11	10
0		1		1
1	1	1		1

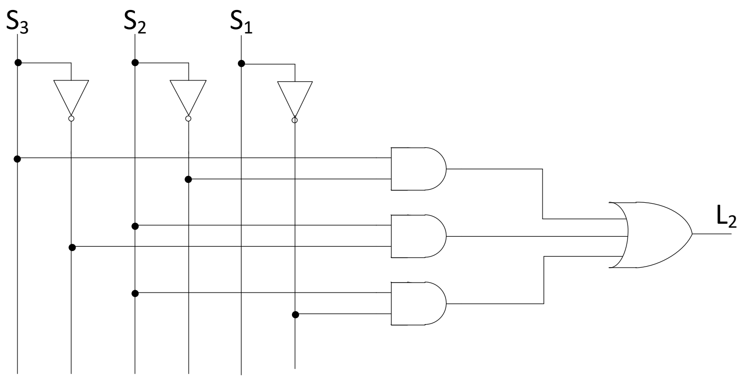
$$L_1 = \overline{S_2}S_1 + S_2\overline{S_1} + S_3\overline{S_2}$$



Función L2

S_2 \ S_1	00	01	11	10
0			1	1
1	1	1		1

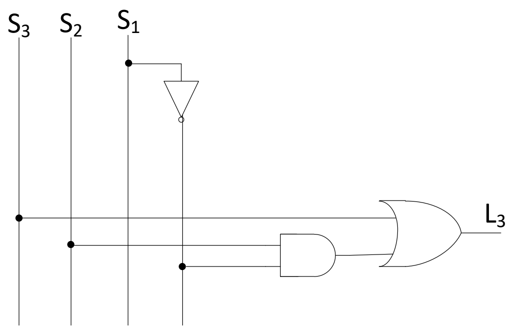
$$L_2 = \overline{S_3}S_2 + S_2\overline{S_1} + S_3\overline{S_2}$$



Función L3

S_2 \ S_1	00	01	11	10
0				1
1	1	1	1	1

$$L_3 = S_2\overline{S_1} + S_3$$

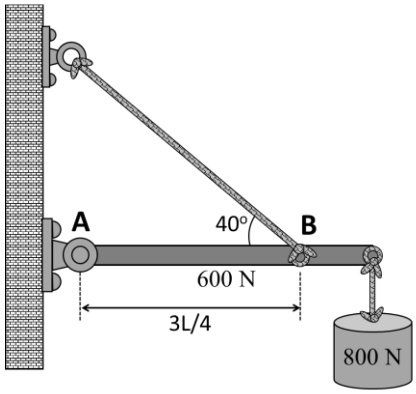


2) Problemas de Estructuras

Propuesta de contenidos del bloque C1 de la Comisión Estatal para el curso 2025-26

Bloque C. Preguntas sobre: C1: i) Descripción y elementos de estructuras sencillas: en edificación elementos resistentes básicos como pórticos (pilares y vigas) y cerchas, en maquinaria análisis estático de estructuras simples; ii) Estabilidad y cálculos básicos de estructuras; iii) Tipos de cargas: puntuales y uniformemente repartidas; iv) tipos de apoyos y uniones: empotrados, fijos y articulados; v) Cálculo gráfico y/o analítico de esfuerzos en vigas simplemente apoyadas y/o empotradas en un extremo. Representación de diagramas de esfuerzo cortante y momento flector.

Problema 1 (*)
En el sistema en equilibrio que se muestra en la figura adjunta, la viga uniforme de longitud L pesa 0,60 kN y está sujeta a un apoyo articulado fijo en el punto A y a una cuerda tensora en el punto B. En el otro extremo, la viga sujeta un peso de 0,80 kN.

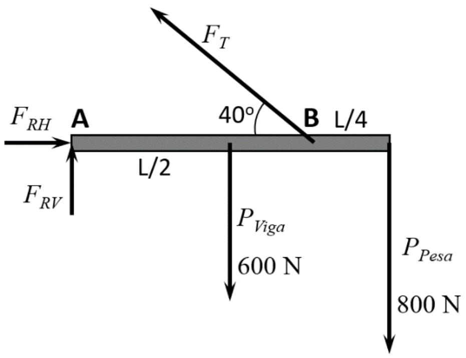


Se pide:

a) Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.
b) Calcular la tensión en la cuerda tensora y las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el apoyo articulado fijo sobre la viga.

Solución

a) Diagrama del sólido libre:



P_{Viga} es el peso de la viga. P_{Pesa} es el peso de la carga sujeta en el extremo libre de la viga. F_T es la fuerza ejercida por el tensor que forma un ángulo de 40º con la viga. La fuerza de reacción en el apoyo articulado (punto A) de forma genérica se descompone en una fuerza de reacción horizontal (F_{RH}) y una fuerza de reacción vertical (F_{RV}). El sentido de estas componentes dependerá de la resultante de fuerzas y momentos que haya en el sistema completo.

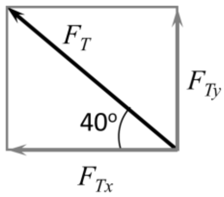
b) Cálculo de la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el apoyo articulado.
Para calcular F_T, F_{RH} y F_{RV} se plantean las ecuaciones de equilibrio en los ejes principales del sistema, x e y.

$$\sum F_x = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \qquad (2)$$

La única fuerza que no está en las direcciones principales es F_T, que podemos descomponerla como:

$$F_{Tx} = F_T \cdot cos\ 40$$
$$F_{Ty} = F_T \cdot sen\ 40$$



Aplicando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas (1 y 2) tomando el criterio de signo positivo en el eje x de izquierda a derecha y signo positivo en el eje y de abajo a arriba, queda:

Eje x: $$-\,F_T \cdot cos\ 40 + F_{RH} = 0$$

Eje y: $$F_T \cdot sen\ 40 + F_{RV} - P_{Viga} - P_{Pesa} = 0$$

Para calcular la tensión de la cuerda (F_T) empleamos la ecuación de equilibrio de momentos, tomando como referencia el punto P para anular las dos componentes de la fuerza realizada por el apoyo articulado:

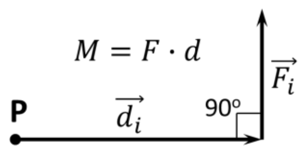
$$\sum \overrightarrow{M_i} = \vec{0} \qquad (3)$$

donde $\overrightarrow{M_i}$ es el momento de la fuerza *i* que se calcula como el producto vectorial del vector fuerza y el vector distancia de aplicación de la fuerza $\overrightarrow{d_i}$:

$$\overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{F_i} \times \overrightarrow{d_i} = F_i \cdot d_i \cdot sen\ \theta$$

siendo θ el ángulo que forman ambos vectores. Cuando este ángulo sea 90º, el seno valdrá 1 y el momento de la fuerza será:

$$M = F \cdot d$$



Cuando el ángulo sea 0º, el seno vale 0 y el momento es nulo, por lo que conviene plantear la ecuación de equilibrio de momentos con las fuerzas descompuestas en las dos direcciones principales. El criterio de signos para los momentos es positivo cuando para llevar el vector fuerza sobre el vector distancia (de modo que queden en el mismo sentido) haya que hacer una rotación en sentido antihorario, y negativo cuando la rotación sea en sentido horario. Planteando la ecuación de equilibrio de momentos respecto del punto P:

$$(F_T\ sen\ 40) \cdot \frac{3L}{4} - P_{Viga} \cdot \frac{L}{2} - P_{Pesa} \cdot L\ = 0$$

Sustituyendo valores con las fuerzas en N:

$$F_T \cdot 0{,}6428 \cdot \frac{3}{4} - 600\ N \cdot \frac{1}{2} - 800\ N\ = \frac{0}{L} = 0$$

se obtiene:

$$F_T = 2281{,}7\ N$$

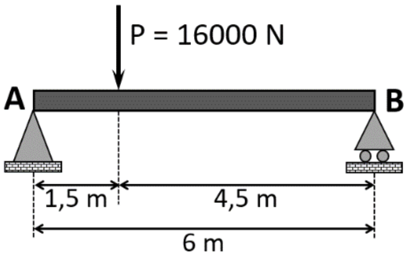
Una vez que F_T es conocida, ya se pueden calcular las componentes de la reacción en el apoyo articulado:

$$F_{RH} = F_T \cdot cos\ 40 = 1\ 747{,}9\ N$$

$$F_{RV} = P_{Viga} + P_{Pesa} - F_T \cdot sen\ 40 = -\ 66{,}6\ N$$

La fuerza de reacción vertical es muy pequeña en comparación con la reacción horizontal, y además es negativa, por lo que irá en sentido opuesto al considerado inicialmente en el diagrama del sólido libre realizado en el apartado a).

Problema 2 (*)
Se requiere analizar la viga presentada en la figura adjunta:

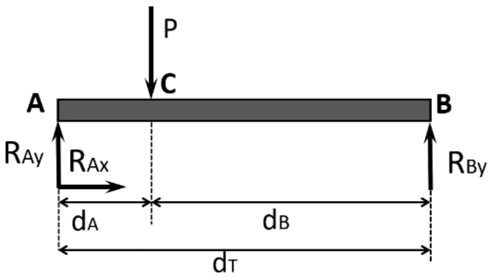


Considerando los datos proporcionados, calcular:

a) Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático.
b) Las ecuaciones de fuerzas cortantes y momentos flectores en cada tramo de la viga en función de la coordenada “x”.
c) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga.

Solución
a) Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático.

Para calcular las reacciones en los apoyos hay que considerar el diagrama de cuerpo libre y aplicar las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos. El apoyo A es un apoyo fijo, por lo que a priori la reacción tendrá una componente horizontal en el eje x y otra vertical en el eje y. El apoyo B es móvil a lo largo del eje x, por lo que no va a ejercer reacción en ese eje, quedando de forma genérica el siguiente diagrama de cuerpo libre:



Como la fuerza P aplicada en la viga es vertical, de la condición de equilibrio estático de las fuerzas en el *eje x* se obtiene que la componente *x* de la reacción en A (R_{Ax}) es nula:

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 0\; kN$$

Aplicando condiciones de equilibrio estático en el *eje y*, tomando el sentido de abajo hacia arriba como positivo, obtenemos que:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} + R_{By} - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = P - R_{By}$$

Consideraremos los siguientes datos de distancias de los apoyos respecto a la carga puntual:

$d_A = 1{,}5\, m$	$d_B = 4{,}5\, m$	$d_T = d_A + d_B = 6\, m$

Aplicando la condición de equilibrio estático de los momentos respecto del punto A y tomando como signo positivo el sentido antihorario, se obtiene:

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; R_{By} \cdot d_T - P \cdot d_A = 0 \;\rightarrow\; R_{By} = \frac{P \cdot d_A}{d_T} = \frac{16\,000\, N \cdot 1{,}5 m}{6 m} \;\rightarrow\; R_{By} = 4\,000\, N$$

Con lo que:

$$R_{Ay} = P - R_{By} = 16\ 000N - 4\ 000\ N$$

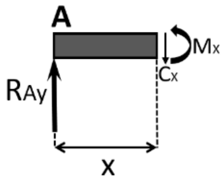
$$R_{Ay} = 12\ 000\ N$$

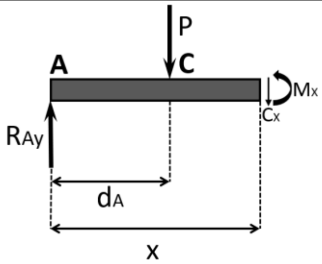
b) Cálculo de las expresiones de los esfuerzos cortantes y momentos flectores en función de x.

La viga tiene dos apoyos (uno fijo en el punto A y otro móvil o articulado en el punto B) y debe soportar una fuerza puntual de 16 kN en el punto C, con lo que dicha viga queda dividida en 2 zonas (AC y CB en el esquema).

A continuación, se aplica el Método de Secciones en Vigas mediante el cual eliminamos una porción de viga para cada tramo y lo sustituimos por una resultante de esfuerzos tanto para los esfuerzos cortantes como para los momentos flectores representados por C_x y M_x, respectivamente. A la derecha de la sección realizada, la resultante de esfuerzos cortantes, C_x, y de momentos flectores, M_x, se consideran positivos en sentido hacia abajo y en sentido antihorario, respectivamente.

De esta forma, al aplicar las condiciones de equilibrio obtenemos los siguientes resultados:

Tramo AC: $0m \leq x \leq 1{,}5m$	**Esfuerzos Cortantes**	**Momentos Flectores**
	$-C(x) + R_{Ay} = 0$ $C(x) = R_{Ay}$ $C(x) = 12\ kN$	$M(x) - R_{Ay} \cdot x = 0$ $M(x) = R_{Ay} \cdot x$ $M(x) = 12\ kN \cdot x$

Tramo CB: $1.5m \leq x \leq 6m$	**Esfuerzos Cortantes**	**Momentos Flectores**
	$-C(x) - P + R_{Ay} = 0$ $C(x) = R_{Ay} - P$ $C(x) = 12\ kN - 16\ kN$ $C(x) = -4\ kN$	$M(x) + P(x - d_A) - R_{Ay} \cdot x = 0$ $M(x) = R_{Ay} \cdot x - P \cdot x + P \cdot d_A$ $M(x) = 12\ kN \cdot x - 16\ kN \cdot x + 16\ kN \cdot 1{,}5\ m$ $M(x) = -4x + 24\ kNm$

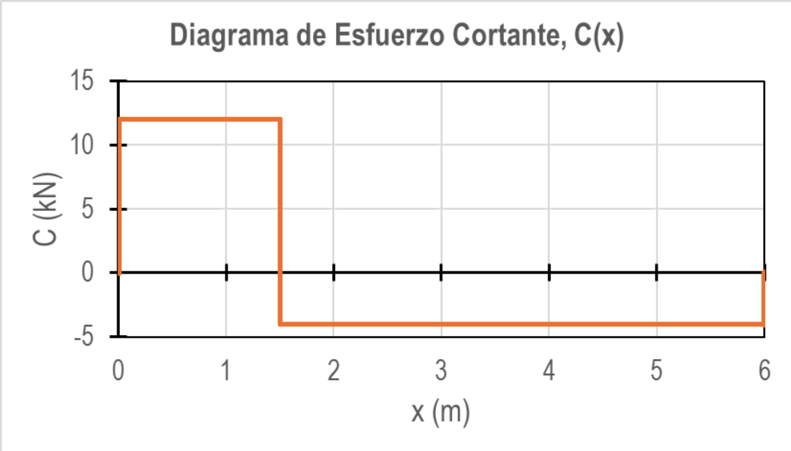
c) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga.

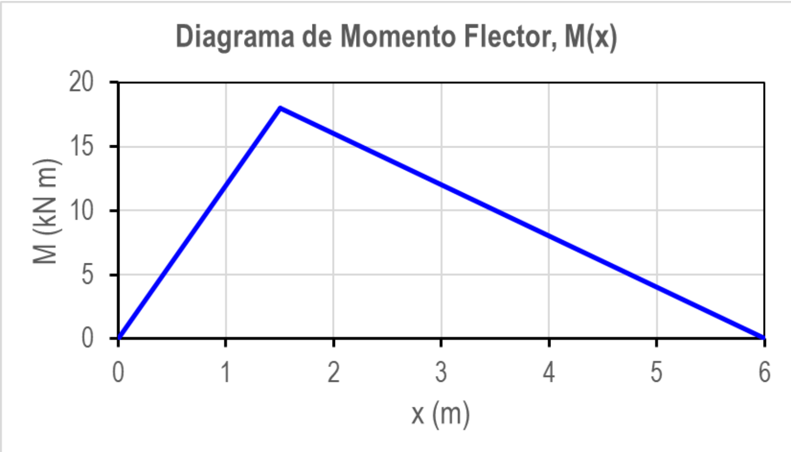
Para representar tanto los esfuerzos cortantes como los momentos flectores tendremos en cuenta que sus expresiones son ecuaciones lineales y que podremos obtener dichas representaciones en cada tramo mediante dos puntos. Dichos puntos serán los límites de cada tramo representado.

Tramo AC: $0\ m \leq x \leq 1{,}5\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = 12\ kN$	$C(0) = 12\ kN$ $C(1{,}5) = 12\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = 12\ kN \cdot x$	$M(0) = 12\ kN \cdot 0\ m \rightarrow M(0\ m) = 0\ kNm$ $M(1.5) = 12\ kN \cdot 1{,}5\ m \rightarrow M(1.5\ m) = 18\ kNm$

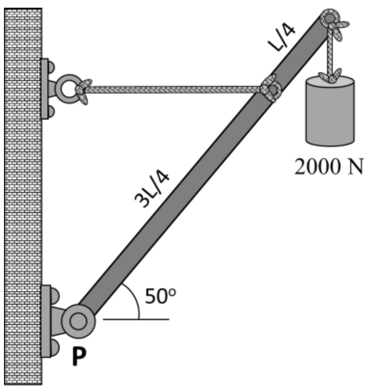
Tramo CB: $1{,}5\ m \leq x \leq 6\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = -4\ kN$	$C(1{,}5) = -4\ kN$ $C(6) = -4\ kN$

Momentos flectores: $M(x) = -4x + 24\ kNm$	$M(1{,}5) = -4 \cdot 1.5\ m + 24\ kNm \ \rightarrow M(1{,}5) = 18\ kNm$ $M(6) = -4 \cdot 6\ m + 24\ kNm \ \rightarrow M(6) = 0\ kNm$





Problema 3 **(**)**
Un asta de peso 0,40 N y densidad uniforme está suspendida como se muestra en la figura. En su extremo libre sujeta un peso de 2 kN.

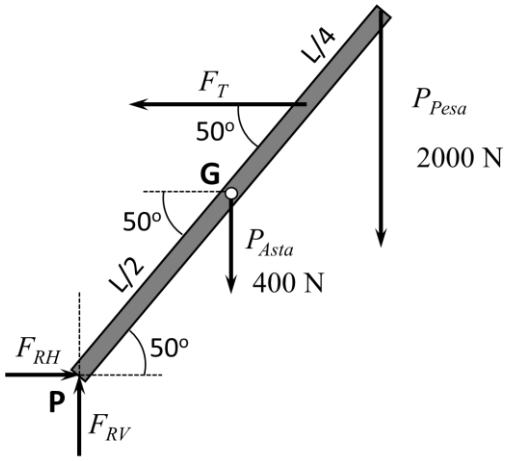


Se pide:

a) Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.
b) Calcular la tensión en la cuerda y la fuerza que ejerce el pivote en P sobre el asta.

Solución

a) Diagrama del sólido libre:



P_{Asta} es el peso del asta. P_{Pesa} es el peso de la carga sujeta en el extremo libre del asta. F_T es la fuerza ejercida por el tensor que forma un ángulo de 50º con la viga. La fuerza de reacción en el pivote (punto P) de forma genérica se descompone en una fuerza de reacción horizontal (F_{RH}) y una fuerza de reacción vertical (F_{RV}). El sentido de estas componentes dependerá de la resultante de fuerzas y momentos que haya en el sistema completo.

b) Cálculo de la tensión en la cuerda y la fuerza que ejerce el pivote sobre el asta.

Teniendo en cuenta el diagrama de sólido libre, se aplican las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos:

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad F_{RH} - F_T = 0 \quad \rightarrow \quad F_{RH} = F_T$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad F_{RV} - P_{Asta} - P_{Pesa} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{RV} = P_{Asta} + P_{Pesa} = 2{,}4kN$$

Para calcular la fuerza que ejerce la cuerda tensora hay que usar la ecuación de equilibrio en momentos:

$$\sum \overrightarrow{M_i} = \vec{0}$$

donde $\overrightarrow{M_i}$ es el momento de la fuerza *i* que se calcula como el producto vectorial del vector fuerza y el vector distancia de aplicación de la fuerza $\overrightarrow{d_i}$:

$$\overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{F_i} \times \overrightarrow{d_i} = F_i \cdot d_i \cdot sen\,\theta$$

Como se ve en el diagrama de sólido libre, el ángulo entre la fuerza y la distancia no es 90º. Se toman momentos respecto del punto P para que los momentos de las componentes de la reacción sean nulos, considerando positivos los giros en sentido antihorario.

$$F_T \cdot 3L/4 \cdot sen50^o - P_{Asta} \cdot L/2 \cdot sen40^o - P_{Pesa} \cdot L \cdot sen40^o = 0$$

$$F_T = -\frac{\left(P_{Asta} \cdot \frac{L}{2} \cdot sen40^o + P_{Pesa} \cdot L \cdot sen40^o\right)}{\frac{3L}{4} \cdot sen50^o} = \frac{-\left(\frac{1}{2} \cdot P_{Asta} + P_{Pesa}\right) \cdot sen40^o}{\frac{3}{4} \cdot sen50^o}$$

$$F_T = 2460\ N = 2{,}46\ kN$$

Con lo cual la componente horizontal de la reacción en el pivote es $F_{RH} = F_T = 2{,}46\ kN$

Como se pide la fuerza, hay que hacer la suma vectorial de las dos componentes. La magnitud de la fuerza de reacción es:

$$F_R = \sqrt{2{,}40^2 + 2{,}46^2} = 3{,}44kN$$

Y la dirección:

$$tan\,\theta = \frac{2\,400}{2\,460} = 0{,}9756 \quad \rightarrow \quad \theta = 44^{o}$$

Problema 4 (**)

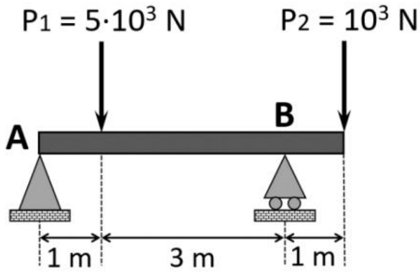
En la siguiente figura se representan las cargas que debe soportar una viga y los apoyos que tiene en la estructura de la que forma parte.

Considerando los datos proporcionados, analizar la estructura calculando:

a) Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático.

b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga.

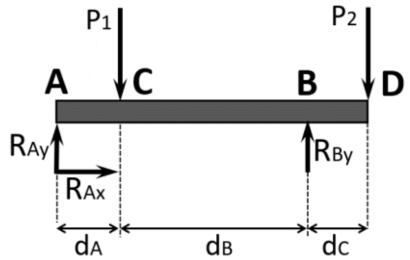
c) Obtener el momento flector máximo.



Solución

a) Las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático.

Para calcular las reacciones se necesita el diagrama de cuerpo libre, y aplicaremos los criterios de equilibrio de esfuerzos y momentos con el criterio de signos habitual (fuerzas positivas en sentido hacia arriba, momentos positivos en sentido antihorario):



Las distancias definidas en el diagrama de sólido libre son:

$d_A = 1\,m$	$d_B = 3\,m$	$d_C = 1\,m$	$d_T = d_A + d_B + d_C = 5\,m$

Equilibrio de fuerzas en el eje x:

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 0\,kN$$

Equilibrio estático de fuerzas en eje y:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} + R_{By} - P_1 - P_2 = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = P_1 + P_2 - R_{By}$$

Momentos respecto del punto A:

$$\sum M_A = 0 \;\rightarrow\; R_{By} \cdot (d_A + d_B) - P_1 \cdot d_A - P_2 \cdot d_T = 0 \;\rightarrow\; R_{By} = \frac{P_1 \cdot d_A + P_2 \cdot d_T}{d_A + d_B}$$

$$R_{By} = \frac{5\,kN \cdot 1\,m + 1\,kN \cdot 5\,m}{1\,m + 3\,m} \;\rightarrow\; R_{By} = 2{,}5\,kN$$

Con lo que:

$$R_{Ay} = P_1 + P_2 - R_{By} = 5\,kN + 1\,kN - 2{,}5\,kN \;\rightarrow\; R_{Ay} = 3{,}5\,kN$$

b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga.

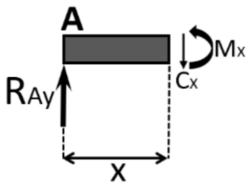
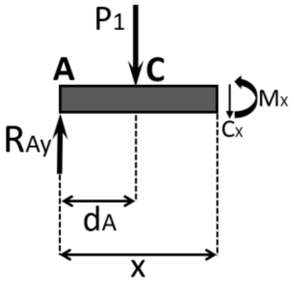
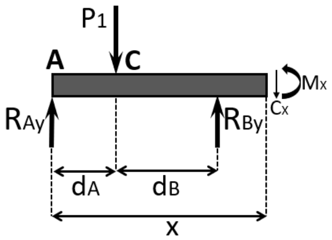
La viga tiene dos apoyos (uno fijo en el punto A y otro móvil o articulado en el punto B) y debe soportar dos fuerzas puntuales (una de 5 kN en el punto C, P_1, y otra de 1 kN en el punto D, P_2), con lo que queda dividida en tres zonas (AC, CB y BD en el diagrama).

A continuación, se aplica el Método de Secciones en Vigas mediante el cual eliminamos una porción de viga para cada tramo y lo sustituimos por una resultante de esfuerzos tanto para los esfuerzos cortantes como para los momentos flectores representados por C_x y M_x, respectivamente. A la derecha de la sección realizada, la resultante de esfuerzos cortantes, C_x, y de momentos flectores, M_x, se consideran positivos en sentido hacia abajo y en sentido antihorario, respectivamente.

En este ejemplo, se calculan la expresión de esfuerzos cortantes mediante la siguiente relación:

$$C(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

De esta forma, al aplicar las condiciones de equilibrio obtenemos los siguientes resultados:

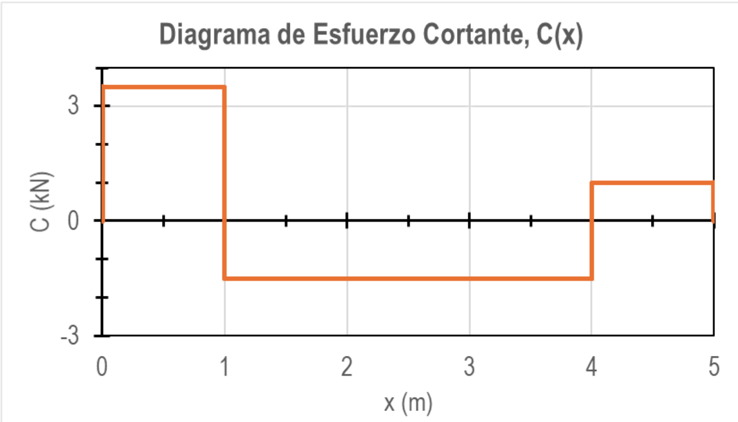
Tramo AC: $0\ m \leq x \leq 1\ m$	
	Momentos Flectores: $M(x) - R_{Ay} \cdot x = 0 \ \rightarrow\ M(x) = R_{Ay} \cdot x \ \rightarrow M(x) = 3{,}5 \cdot x\ kNm$ Esfuerzos Cortantes: $C(x) = R_{Ay} \ \rightarrow\ C(x) = 3{,}5\ kN$
Tramo CB: $1\ m \leq x \leq 4\ m$	
	Momentos Flectores: $M(x) + P_1(x - d_A) - R_{Ay} \cdot x = 0 \ \rightarrow\ M(x) = R_{Ay} \cdot x - P_1(x - d_A)$ $M(x) = 3{,}5\ kN \cdot x - 5\ kN(x - 1\ m) \rightarrow M(x) = -1{,}5 \cdot x + 5\ kNm$ Esfuerzos Cortantes: $C(x) = R_{Ay} - P_1 \ \rightarrow\ C(x) = 3{,}5\ kN - 5\ kN \ \rightarrow C(x) = -1{,}5\ kN$
Tramo BD: $4\ m \leq x \leq 5\ m$	
	Momentos Flectores: $M(x) + P_1(x - d_A) - R_{Ay} \cdot x - R_{By} \cdot (x - d_A - d_B) = 0$ $M(x) = -P_1(x - d_A) + R_{Ay} \cdot x + R_{By} \cdot (x - d_A - d_B)$ $M(x) = -5\ kN\ (x - 1\ m) + 3{,}5\ kN \cdot x + 2{,}5\ kN \cdot (x - 1\ m - 3\ m)$ $M(x) = x - 5\ kNm$ Esfuerzos Cortantes: $C(x) = -P_1 + R_{Ay} + R_{By} \ \rightarrow C(x) = -5\ kN + 3{,}5\ kN + 2{,}5\ kN$ $C(x) = 1\ kN$

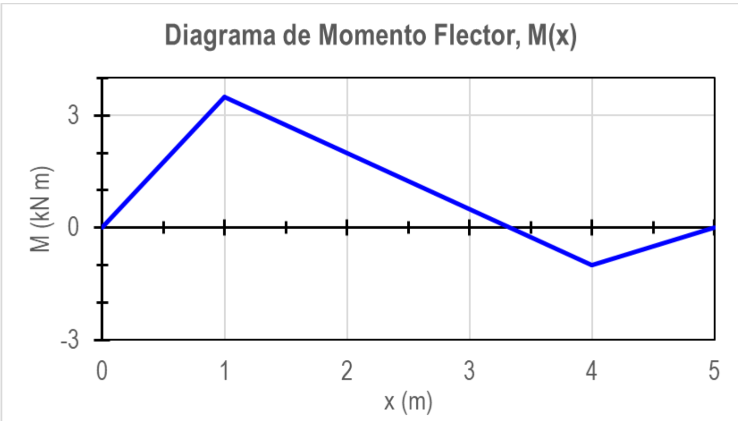
Para representar tanto los esfuerzos cortantes como los momentos flectores tendremos en cuenta que sus expresiones son ecuaciones lineales y que podremos obtener dichas representaciones en cada tramo mediante dos puntos. Dichos puntos serán los límites de cada tramo representado.

Tramo AC: $0\ m \leq x \leq 1\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = 3{,}5\ kN$	$C(0) = 3{,}5\ kN$ $C(1) = 3{,}5\ kN$
Momentos flectores:	$M(0) = 3{,}5 \cdot 0\ m \ \rightarrow\ M(0) = 0\ kNm$ $M(1.5) = 3{,}5 \cdot 1\ m \rightarrow\ M(1) = 3{,}5\ kNm$

$M(x) = 3{,}5 \cdot x\ kNm$	
Tramo CB: $1\ m \leq x \leq 4\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = -1{,}5\ kN$	$C(1) = -1{,}5\ kN$ $C(4) = -1{,}5\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = -1{,}5 \cdot x + 5\ kNm$	$M(1) = -1{,}5 \cdot 1 + 5\ kNm \rightarrow M(1) = 3{,}5\ kNm$ $M(4) = -1{,}5 \cdot 4 + 5\ kNm \rightarrow M(4) = -1\ kNm$
Tramo BD: $4\ m \leq x \leq 5\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = 1\ kN$	$C(4) = 1\ kN$ $C(5) = 1\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = x - 5\ kNm$	$M(4) = 4 - 5\ kNm \rightarrow M(4) = -1\ kNm$ $M(5) = 5 - 5\ kNm \rightarrow M(5) = 0\ kNm$

Con estos datos, los diagramas son:





c) Obtener el momento flector máximo.
Según las gráficas del apartado anterior el valor máximo que alcanza el momento flector en x = 1 m, es:

$$M_{max}(1\ m) = 3{,}5\ kNm$$

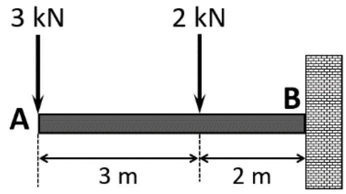
Problema 5 (**)
Se requiere analizar una viga de 5 m con su extremo derecho (punto B) empotrado en una pared. Sobre el extremo izquierdo (punto A) actúa una fuerza peso de 3 kN, y a 2 m del empotramiento se localiza otra fuerza peso de 2 kN. Se pide:

a) Calcular el valor de las reacciones que se producen en el empotramiento (punto B) en condiciones de equilibrio estático.
b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga en función de x.

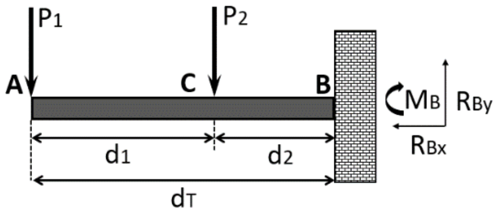
Solución

a) Cálculo de la reacción en B.

El esquema del problema que se plantea es:



Para calcular las reacciones en el punto B se necesita el diagrama de cuerpo libre y aplicar las condiciones de equilibrio estático. El empotramiento es un apoyo fijo que no permite desplazamientos, por lo que la reacción tendrá de forma genérica componente en el eje x (R_{Bx}) y en el eje y (R_{By}).



Las distancias definidas en el diagrama son:

$d_1 = 3\,m$	$d_2 = 2\,m$	$d_T = d_1 + d_2 = 5\,m$

Aplicando que la resultante de fuerzas en *x* es nula tenemos que:

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Bx} = 0\,kN$$

Del equilibrio de fuerzas en el *eje y* usando el criterio de fuerza positiva en sentido ascendente, obtenemos que:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By} - P_1 - P_2 = 0 \quad \rightarrow \quad R_{By} = P_1 + P_2 \quad \rightarrow \quad R_{By} = 5kN$$

Momentos respecto del punto B:

$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad M_B - P_1 \cdot d_T - P_2 \cdot d_2 = 0 \quad \rightarrow \quad M_B = P_1 \cdot d_T + P_2 \cdot d_2$$

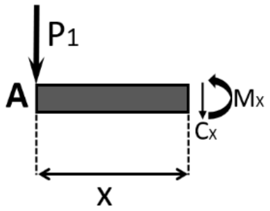
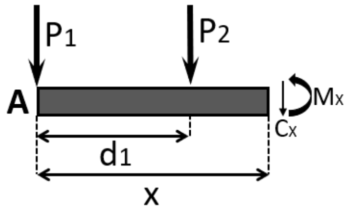
$$M_B = 3\,kN \cdot 5\,m + 2\,kN \cdot 2\,m \rightarrow M_B = 19\,kNm$$

b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga en función de x.

La viga tiene un empotramiento en el punto B y debe soportar dos fuerzas puntuales de 3 kN y 2 kN en los puntos A y C, respectivamente. Por lo tanto, la viga queda dividida en 2 zonas (AC y CB en el esquema.)

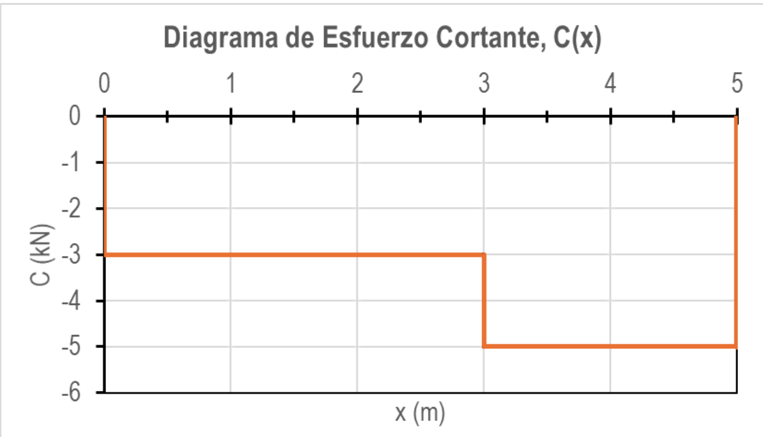
A continuación, se aplica el Método de Secciones en Vigas mediante el cual eliminamos una porción de viga para cada tramo y lo sustituimos por una resultante de esfuerzos tanto para los esfuerzos cortantes como para los momentos flectores representados por C_x y M_x, respectivamente. A la derecha de la sección realizada, la resultante de esfuerzos cortantes, C_x, y de momentos flectores, M_x, se consideran positivos en sentido hacia abajo y en sentido antihorario, respectivamente. El sistema de referencia de la distancia se sitúa en el punto A (x=0), por lo que el corte se realiza de izquierda a derecha.

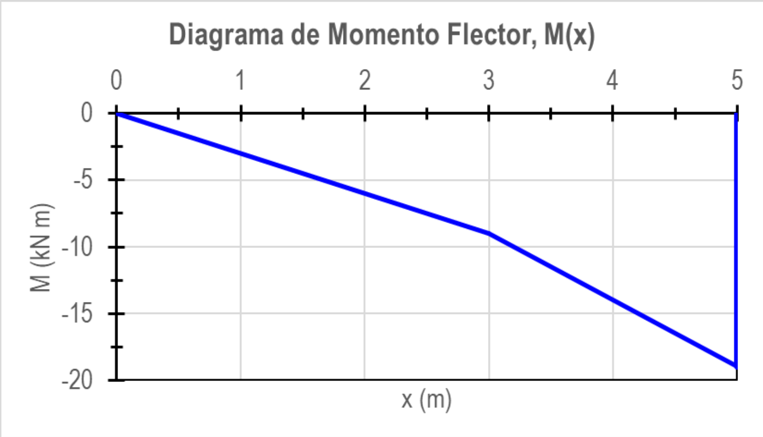
Aplicando las condiciones de equilibrio:

Tramo AC: $0\ m \le x \le 3\ m$	
	Esfuerzos Cortantes: $-C(x) - P_1 = 0 \rightarrow\ C(x) = -P_1\ \rightarrow\ C(x) = -3\ kN$ Momentos Flectores: $M(x) + P_1 \cdot x = 0\ \rightarrow\ M(x) = -P_1 \cdot x\ \rightarrow\ M(x) = -3\ kN \cdot x$
Tramo CB: $3\ m \le x \le 5\ m$	
	Esfuerzos Cortantes: $-C(x) - P_1 - P_2 = 0\ \rightarrow\ C(x) = -P_1 - P_2\ \rightarrow\ C(x) = -3\ kN - 2\ kN$ $C(x) = -5\ kN$ Momentos Flectores: $M(x) + P_1 \cdot x + P_2(x - d_1) = 0$ $M(x) = -P_1 \cdot x - P_2 \cdot x + P_2 \cdot d_1 = 0$ $M(x) = -3\ kN \cdot x - 2\ kN \cdot x\ + 2\ kN \cdot 3\ m$ $M(x) = -5\ x + 6\ kNm$

Para representar los esfuerzos cortantes y los momentos flectores tendremos en cuenta que sus expresiones son ecuaciones lineales en *x*, por lo que será suficiente con sustituir en C(x) y M(x) los extremos de cada tramo.

Tramo AC: $0\ m \le x \le 3\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = -3\ kN$	$C(0) = -3\ kN$ $C(3) = -3\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = -3kN \cdot x$	$M(0) = -3\ kN \cdot 0\ m\ \rightarrow\ M(0) = 0\ kNm$ $M(3) = -3\ kN \cdot 3\ m \rightarrow\ M(3) = -9\ kNm$
Tramo CB: $3\ m \le x \le 5\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = -5\ kN$	$C(3) = -5\ kN$ $C(5) = -5\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = -5\ x + 6\ kNm$	$M(3) = -9\ kNm$ $M(5) = -19\ kNm$





Problema 6 (**)

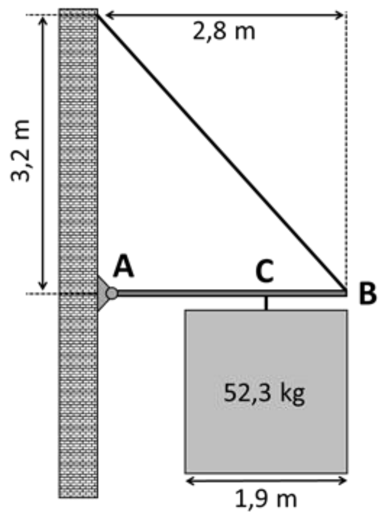
Para colgar un cartel en la fachada de un edificio, se usa una barra horizontal con un extremo fijo en la pared a cierta altura. El otro extremo de la barra se sujeta con un cable tensor que se fija a la pared 3,2 m por encima del apoyo fijo de la barra. La barra mide 2,8 m de largo y su masa es despreciable. El cartel es cuadrado, de 1,9 m de lado y 52,3 kg. Cuelga del punto central de su lado superior mediante un cable fijado a la barra, de modo que el extremo derecho del cartel queda alineado con el extremo derecho de la barra.

Se pide:

a) Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.
b) Calcular la tensión del cable de soporte.
c) Calcular las componentes horizontal y vertical de la reacción ejercida por la pared.

Solución

a) El esquema de la estructura con los datos del enunciado es:



Para realizar los cálculos se necesita el peso del cartel en N (el peso de la barra es despreciable) y el ángulo que forma el tirante con la barra:

$$P_{Cartel} = m \cdot g = 52{,}3\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 513{,}063\ N$$

$$tan(\alpha) = \frac{3{,}2}{2{,}8} \quad \rightarrow \quad \alpha = 48{,}8°$$

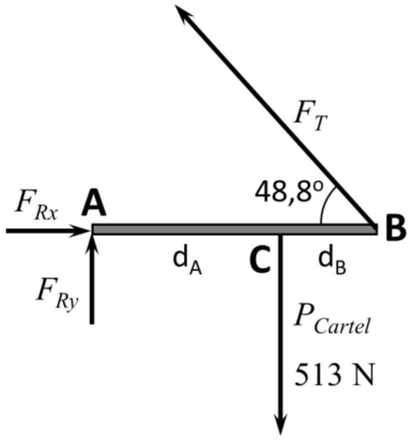
El cartel cuelga a la siguiente distancia de extremo derecho de la barra:

$$d_B = \frac{1{,}9\ m}{2} = 0{,}95\ m$$

Con lo cual la distancia respecto del extremo izquierdo fijado en la fachada es:

$$d_A = 2{,}8\ m - 0{,}95\ m = 1{,}85\ m$$

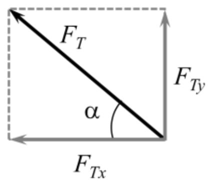
Con esto, el diagrama del sólido libre es el de la figura:



F_T es la fuerza ejercida por el tensor que forma un ángulo de 48,8º con la barra. La fuerza de reacción en el apoyo fijo (punto A) de forma genérica se descompone en una fuerza de reacción en el *eje x* (F_{Rx}) y una fuerza de reacción en *y* (F_{Ry}). Cuando se calculen las fuerzas y momentos se verá cuál es realmente el sentido de estas componentes.

b) Tensión en el cable de soporte:

Se descompone F_T en la dirección de los ejes principales:



$$F_{Tx} = cos(\alpha) \cdot F_T = cos(48{,}8°) \cdot F_T$$

$$F_{Ty} = sen(\alpha) \cdot F_T = sen(48{,}8°) \cdot F_T$$

Se aplican las condiciones de equilibrio estático de los momentos resultantes respecto del punto A. Todas las fuerzas son paralelas o perpendiculares a los vectores distancia. El momento de las paralelas es nulo, el de las perpendiculares es *F·d* con el criterio de signos habitual:

$$\Sigma M = 0 \quad \rightarrow \quad -P_{Cartel} \cdot 1{,}85\ m + F_T \cdot sin\ (48{,}8°)\ \cdot 2{,}8\ m = 0$$

$$F_T = \frac{513\ N \cdot 1{,}85\ m}{sin\ (48{,}8°)\ \cdot 2{,}8\ m} \qquad \rightarrow \qquad F_T = 450\ N$$

c) Componentes horizontal y vertical de la reacción en el extremo de la barra fijado en la pared:

Como ya conocemos la fuerza que ejerce el tensor, podemos calcular la reacción en el punto A con la condición de equilibrio estático de las fuerzas. Usando el criterio de signos habitual, la componente horizontal de la reacción de la pared es:

$$\Sigma F_X = 0 \ \rightarrow \ F_{Rx} - F_{Tx} = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Rx} = F_T \cdot cos\ (\alpha\ ) = 450\ N \cdot cos\ (48{,}8°\ )$$

$$F_{Rx} = 296\ N$$

La componente vertical es:

$$\Sigma F_Y = 0 \ \rightarrow \ F_{Ry} + F_{Ty} - P_{Cartel}\ = 0 \quad \rightarrow \quad F_{Ry} = P_{Cartel} - F_T \cdot sen(48{,}8°)$$

$$F_{Ry} = 513N - 450 \cdot sen(48{,}8°) \quad \rightarrow \quad F_{Ry} = 174\ \ N$$

El enunciado no pide la resultante.

Problema 7 (**)

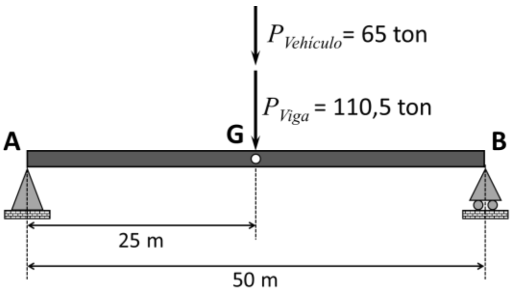
Para evitar inundaciones con las crecidas, se ha canalizado el río Guadalquivir a su paso por Sevilla en varios tramos, y la expansión de la ciudad hace necesario construir un nuevo puente sobre el canal de 46 m de ancho. Se estudia la opción de construir el puente con vigas de hormigón armado tipo Doble T como las de la figura, que pueden alcanzar hasta los 53 m de largo. Tras el estudio del terreno, se decide usar una viga de 50 m de largo apoyada en un extremo en un soporte fijo y el otro en un apoyo móvil o de rodillo. El puente debe soportar el paso de vehículos pesados, por lo que se diseñará para una masa máxima de vehículos de 65 toneladas. La masa de la viga es 110,5 toneladas. Colabora en el diseño del puente resolviendo las siguientes cuestiones.

a) Dibujar el diagrama de sólido libre del puente cuando el vehículo pesado haya recorrido 25 m del puente desde el extremo fijo, y calcular el valor de las reacciones en ambos apoyos en condiciones de equilibrio estático.

b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga, y determinar el momento flector máximo que debe soportar la viga cuando el camión esté en esa posición.

Solución

a) Esquema del sistema propuesto indicando datos proporcionados.



Las fuerzas peso vienen dadas en toneladas, con la equivalencia 1 ton = 1.000 kg. Pasando al sistema internacional:

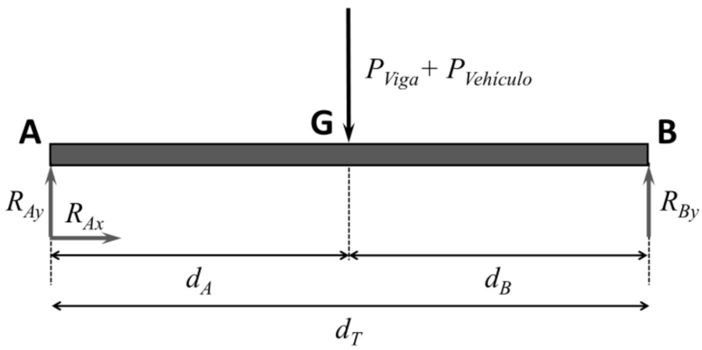
$$P_{Viga} = 110{,}5\ ton \cdot 1\ 000\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 = 1\ 084\ kN\cdot$$

$$P_{Vehículo} = 65\ ton \cdot 1\ 000\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 = 637{,}7\ kN$$

Como cuando el vehículo se encuentra a 25 m del apoyo fijo las dos fuerzas peso se aplican en el mismo punto, el peso resultante es:

$$P_{Total} = (P_{Viga} + P_{Vehículo})\ = 1721{,}7\ kN \sim 1722\ kN$$

Diagrama de sólido libre:



Las reacciones en los apoyos se calculan aplicando las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos. Todas las fuerzas aplicadas están en el eje y, por lo que no hay componente de las reacciones en x: $\sum F_x = R_{Ax} = 0$.

Aplicando la condición de equilibrio estático en el eje y se obtiene que:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} + R_{By} - P_{Total} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = P_{Total} - R_{By}$$

Para tomar momentos consideramos las distancias que se han indicado en el diagrama de cuerpo libre:

$d_A = 25\ m$	$d_B = 25\ m$	$d_T = 50\ m$

Momentos respecto del punto A con el criterio de signos habitual:

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad -P_{Total} \cdot d_A + R_{By} \cdot d_T = 0$$

$$R_{By} = \frac{P_{Total} \cdot d_A}{d_T}$$

$$R_{By} = \frac{1\,722\ kN \cdot 25\ m}{50\ m} \rightarrow R_{By} = 861\ kN$$

Con lo que:

$$R_{Ay} = P_{Total} - R_{By} = (1722 - 861)\ kN \qquad \rightarrow \qquad R_{Ay} = 861\ kN$$

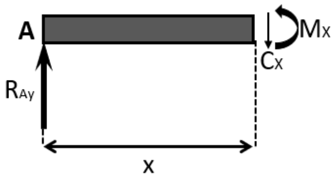
Como el peso se aplica en el punto central, las reacciones son iguales en los dos apoyos situados a la misma distancia del centro.

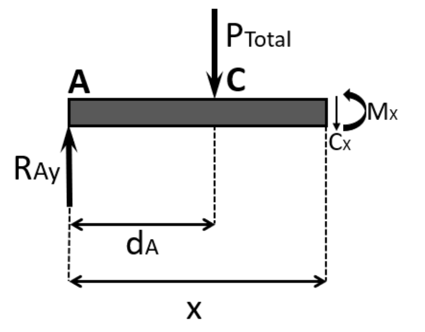
b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores en la viga. Momento flector máximo.

La viga tiene dos apoyos (uno fijo en el punto A y otro móvil o articulado en el punto B) y debe soportar su propio peso en el centro de masas (G) y una fuerza puntual de 637,7 kN en el mismo punto central, con lo que queda dividida en 2 zonas (AG y GB en el esquema).

A continuación, se aplica el Método de Secciones en Vigas mediante el cual eliminamos una porción de viga para cada tramo y lo sustituimos por una resultante de esfuerzos tanto para los esfuerzos cortantes como para los momentos flectores representados por C_x y M_x, respectivamente. A la derecha de la sección realizada, la resultante de esfuerzos cortantes, C_x, y de momentos flectores, M_x, se consideran positivos en sentido hacia abajo y en sentido antihorario, respectivamente.

De esta forma, al aplicar las condiciones de equilibrio obtenemos los siguientes resultados:

<table>
<tr><td colspan="2">Tramo AG: $0\ m \le x \le 25\ m$</td></tr>
<tr><td></td><td>Esfuerzos Cortantes:
$-C(x) + R_{Ay} = 0 \ \rightarrow \ C(x) = R_{Ay} \ \rightarrow \ C(x) = 861\ kN$
Momentos Flectores:
$M(x) - R_{Ay} \cdot x = 0 \ \rightarrow M(x) = R_{Ay} \cdot x \rightarrow$
$M(x) = 861 \cdot x\ kNm$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tramo CB: $25\ m \le x \le 50\ m$</td></tr>
</table>



Esfuerzos Cortantes:

$$-C(x) - P_{Total} + R_{Ay} = 0 \ \rightarrow \ C(x) = R_{Ay} - P_{Total}$$

$$C(x) = 861\ kN - 1722\ kN \ \rightarrow \ C(x) = -861\ kN$$

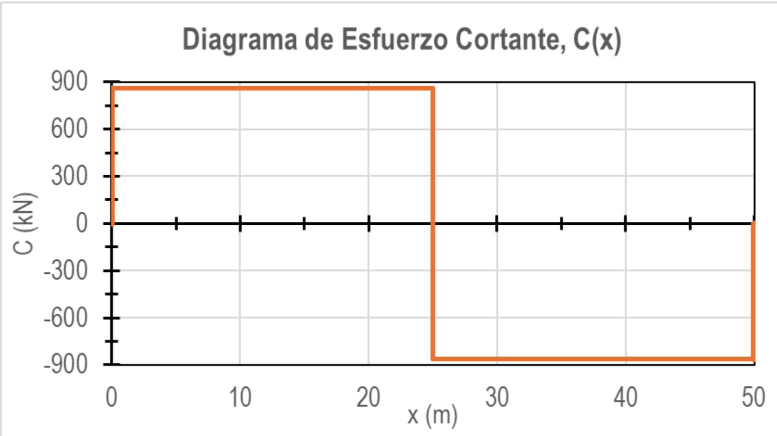
Momentos Flectores:

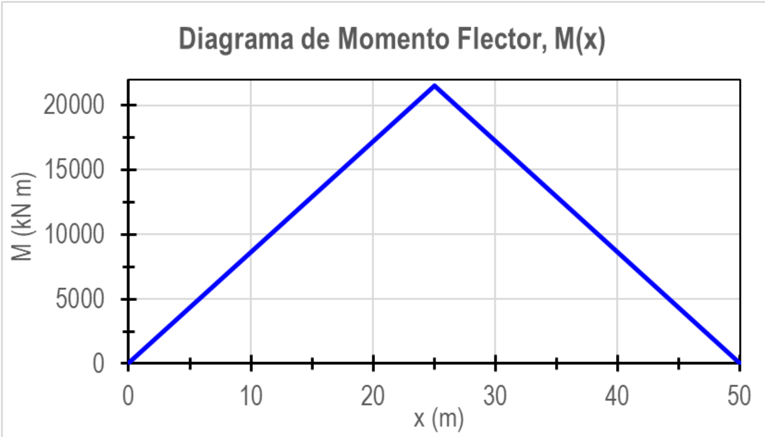
$$M(x) + P_{Total}(x - d_A) - R_{Ay} \cdot x = 0$$
$$M(x) = R_{Ay} \cdot x - P_{Total} \cdot x + P_{Total} \cdot d_A$$
$$M(x) = 861\ kN \cdot x - 1\,722\ kN \cdot x + 1\,722\ kN \cdot 25\ m$$
$$M(x) = -861x + 43\,050\ kNm$$

Para calcular el esfuerzo cortante y momento flector máximos evaluaremos las expresiones obtenidas en sus tramos y podremos obtener dichos valores.

Tramo AC: $0\ m \leq x \leq 25\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = 861\ kN$	$C(0) = 861\ kN$ $C(25) = 861\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = 861 \cdot x\ kNm$	$M(0) = 861\ kN \cdot 0\ m \rightarrow M(0) = 0\ kNm$ $M(25) = 861kN \cdot 25\ m \rightarrow M(25) = 21\,525\ kNm$

Tramo BC: $25\ m \leq x \leq 50\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = -861\ kN$	$C(25) = -861\ kN$ $C(50) = -861\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = (-861x + 43\,050)\ kNm$	$M(25) = 21\,525\ kNm$ $M(50) = 0\ kNm$



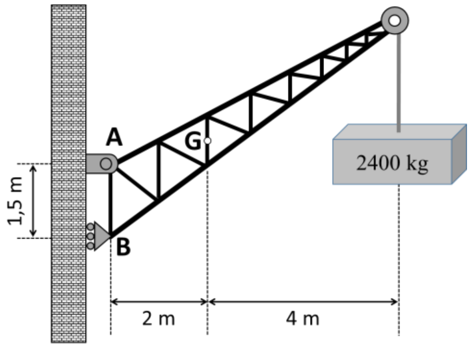


Empleando las expresiones dadas, obtenemos los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores. Según se ve en la gráfica, el momento flector alcanza un valor máximo en x = 25 m, que es de

$$M_{max}(25) = 21\,525\ kNm$$

Problema 8 (***)

Una grúa fija tiene una masa de 1 000 kg y se usa para levantar un contenedor de 2 400 kg. La grúa se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un balancín en B. El perno es un tipo de anclaje fijo que permite rotaciones de la grúa, pero no traslaciones, y un balancín es un apoyo móvil tipo rodillo que permite rotaciones y traslaciones. El centro de gravedad de la grúa está ubicado en G de acuerdo con el siguiente dibujo.

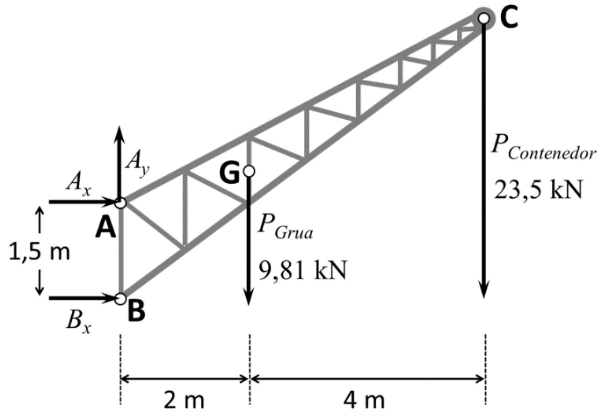


Se pide:

a) Dibujar el diagrama del sólido libre.
b) Calcular la fuerza de reacción en los apoyos A y B.

Solución

a) Diagrama del sólido libre:



P_{Grua} es el peso de la grúa que se sitúa en su centro de masas (G). $P_{Contenedor}$ es el peso de la carga que tiene que mover la grúa (el contenedor de 2 400 kg).

El perno en A es un tipo de apoyo fijo que permite rotaciones pero no traslaciones, por lo que la reacción en A puede descomponerse en una fuerza de reacción horizontal (A_x) y una fuerza de reacción vertical (A_y). El sentido de estas componentes dependerá de la resultante de fuerzas y momentos que haya en el sistema completo; se indica el sentido más probable según el resto de fuerzas.

En B el apoyo es tipo balancín que permite rotaciones y traslaciones, y por tanto permite desplazamientos en el *eje y* (B_y = 0). En el *eje x*, el desplazamiento está limitado por la superficie de apoyo y la fuerza de reacción (B) será perpendicular a la superficie de apoyo (B_x).

b) Cálculo de las reacciones en A y en B.

Para calcular la reacción en B se pueden tomar momentos respecto de A, para que los momentos de las dos componentes de A sean cero.

$$\sum \overrightarrow{M_{iA}} = \vec{0}$$

El momento es el producto vectorial de la fuerza por la distancia. Las tres fuerzas que no se encuentran en A están en las direcciones principales del sistema, por lo que no hace falta descomponerlas para tener ángulos de 90º entre la fuerza y la distancia y para cada una de ellas $M = F \cdot d$. Usaremos el convenio de signos habitual (positivo en sentido horario).

$$+B_x \cdot d_B - P_{Grua} \cdot d_G - P_{Contenedor} \cdot d_C = 0$$

Sustituyendo valores con las fuerzas en kN y las distancias en m:

$$B_x \cdot 1{,}5\ m - 9{,}81\ kN \cdot 2\ m - 23{,}5\ kN \cdot 6\ m = 0$$

De donde se obtiene

$$B_x = 107{,}1\ kN$$

La reacción B_x ha salido positiva, lo que significa que va en el sentido que se supuso, de izquierda a derecha según el criterio de signos habitual para las fuerzas.

Una vez conocida B_x, para determinar las dos componentes de la reacción en A usaremos las condiciones de equilibrio de las fuerzas. En el eje x:

$$\sum F_x = 0$$

$$A_x + B_x = 0 \qquad \rightarrow \qquad A_x = -107{,}1\ kN$$

Como el signo de A es negativo, significa que va de derecha a izquierda, en sentido opuesto al considerado inicialmente en el diagrama de sólido libre.

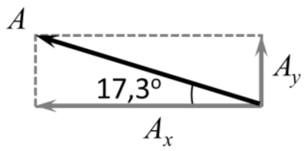
En el eje y:

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - P_{Grua} - P_{Contenedor} = 0 \quad \rightarrow \quad A_y = 9{,}81\ kN + 23{,}5\ kN = +33{,}3\ kN$$

Una vez obtenidas las reacciones A_x y A_y, empleando el teorema de Pitágoras obtenemos A:

$A^2 = A_x^2 + A_y^2$



Por tanto, el módulo de la reacción en A es:

$$A^2 = (-107{,}1)^2 + 33{,}3^2 \qquad \rightarrow \qquad A = 112{,}2\ kN$$

Y el ángulo es

$$tan\ \alpha = \frac{A_y}{A_x} = \frac{-107{,}1}{33{,}3} = -3{,}2162 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = -72{,}7^o$$

La reacción A forma un ángulo de 72,7º respecto del eje y positivo y de 17,3º respecto del eje x negativo.

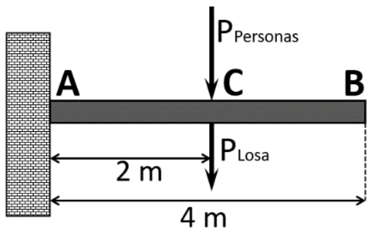
Problema 9 (**)

El estudio de arquitectura Andalusí está desarrollando el proyecto de un bloque de viviendas en primera línea de playa en Almería. Una de las viviendas del ático dispone de una terraza voladiza de 4 m de longitud que sobresale desde la fachada principal. La terraza se modela como una viga con un extremo empotrado en la fachada y el otro extremo en voladizo. Teniendo en cuenta el tamaño total de la terraza, se estima que durante una fiesta puede albergar un grupo de personas con un peso total de 8,5 kN. El peso de la losa de hormigón de la terraza es de 16,8 kN.

a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre de la terraza y calcular las reacciones considerando la fuerza peso del grupo de personas como una carga puntual aplicada en el centro.
b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores resultantes. Determinar el valor del momento flector máximo que soportará la terraza y en qué posición se encuentra.

Solución

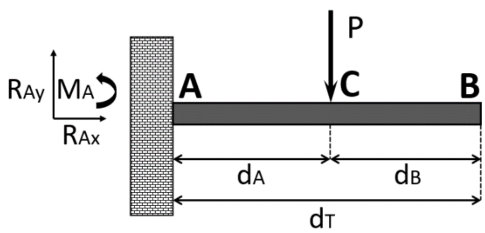
a) Esquema del sistema propuesto indicando datos proporcionados:



La fuerza peso de la terraza se sitúa en el centro de masas de la viga, que se encuentra a 2 m de los extremos, coincidiendo con la distancia a la que se coloca la carga debida al grupo de personas, por lo que la fuerza peso resultante es:

$$P = P_{Losa} + P_{Personas} = (8{,}5 + 16{,}8)\ kN = 25{,}3\ kN.$$

Diagrama de cuerpo libre:



Para calcular las reacciones en los apoyos hay que aplicar las condiciones de equilibrio de fuerzas y de momentos. La resultante de la fuerza en la dirección *x* es nula:

$$\sum F_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ax} = 0\ kN$$

Aplicando condiciones de equilibrio estático en la dirección *y* obtenemos que:

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} - P = 0 \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = P \quad \rightarrow \quad R_{Ay} = 25{,}3\ kN$$

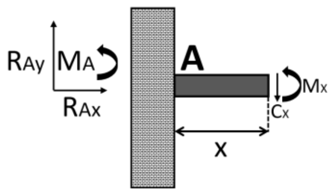
Momentos respecto del punto A:

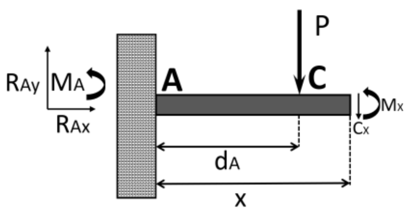
$$\Sigma M = 0 \ \rightarrow \ M_A - P \cdot d_A = 0 \ \rightarrow \ M_A = P \cdot d_A \ \rightarrow \ M_A = 25{,}3\ kN \cdot 2 \ \rightarrow \ M_A = 50{,}6\ kNm$$

b) Representar los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores resultantes.

La viga tiene un empotrado en el punto A y debe soportar una fuerza puntual de 25,3 kN en el punto C, con lo que dicha viga queda dividida en 2 zonas (AC y CB en el esquema).

A continuación, se aplica el Método de Secciones en Vigas mediante el cual eliminamos una porción de viga para cada tramo y lo sustituimos por una resultante de esfuerzos tanto para los esfuerzos cortantes como para los momentos flectores representados por C_x y M_x, respectivamente. A la derecha de la sección realizada, la resultante de esfuerzos cortantes, C_x, y de momentos flectores, M_x, se consideran positivos en sentido hacia abajo y en sentido antihorario, respectivamente.

Tramo AC: $0\ m \le x \le 2\ m$	
	Esfuerzos Cortantes: $C(x) - R_{Ay} = 0 \ \rightarrow \ C(x) = R_{Ay} \ \rightarrow \ C(x) = 25{,}3\ kN$ Momentos Flectores: $M(x) - R_{Ay} \cdot x + M_A = 0 \ \rightarrow \ M(x) = R_{Ay} \cdot x - M_A$ $M(x) = 25{,}3 \cdot x - 50{,}6\ kNm$

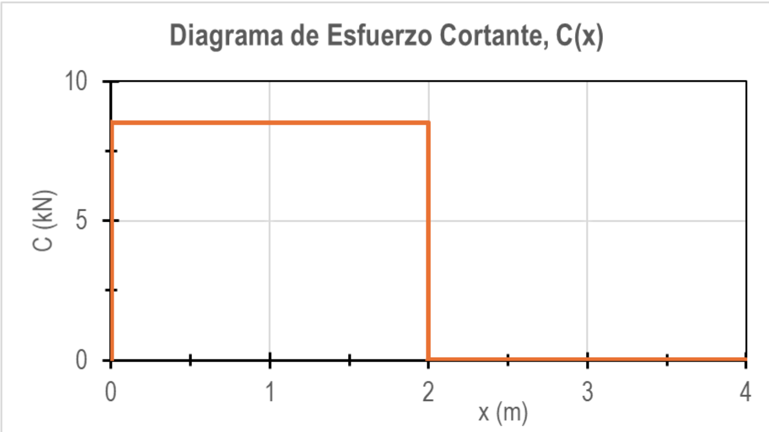
Tramo CB: $2\ m \le x \le 4\ m$	
	Esfuerzos Cortantes: $C(x) + P - R_{Ay} = 0 \ \rightarrow \ C(x) = R_{Ay} - P$ $C(x) = 25{,}3\ kN - 25{,}3\ kN \ \rightarrow \ C(x) = 0\ kN$ Momentos Flectores: $M(x) + P(x - d_A) - R_{Ay} \cdot x + M_A = 0$ $M(x) = R_{Ay} \cdot x - P \cdot x + P \cdot d_A - M_A$ $M(x) = 25{,}3\ kN \cdot x - 25{,}3\ kN \cdot x + 25{,}3\ kN \cdot 2\ m - 50{,}6\ kNm$ $M(x) = 0\ kNm$

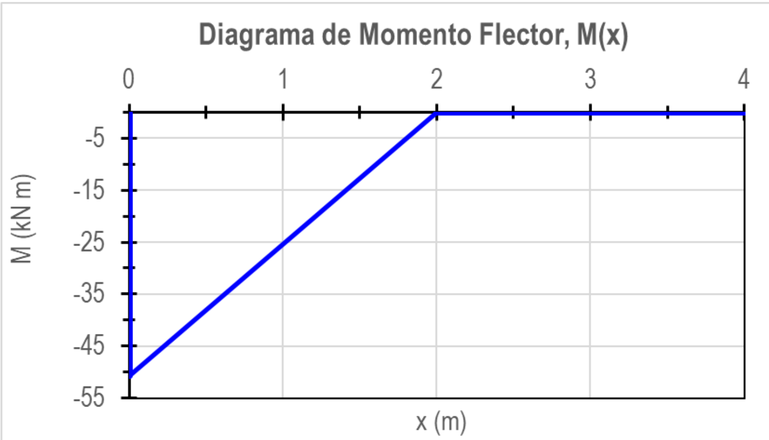
Para representar los diagramas se evalúan las expresiones obtenidas en cada tramo.

Tramo AC: $0\ m \le x \le 2\ m$	
Esfuerzos cortantes	$C(0) = 25{,}3\ kN$

$C(x) = 25{,}3\ kN$	$C(2) = 25{,}3\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = 25{,}3 \cdot x - 50{,}6\ kNm$	$M(0) = 25{,}3\ kN \cdot 0\ m - 17\ kNm \rightarrow M(0) = -50{,}6\ kNm$ $M(2) = 25{,}3\ kN \cdot 2\ m - 17\ kNm \rightarrow M(2) = 0\ kNm$
Tramo BC: $2\ m \leq x \leq 4\ m$	
Esfuerzos cortantes $C(x) = 0\ kN$	$C(2) = 0\ kN$ $C(4) = 0\ kN$
Momentos flectores: $M(x) = 0\ kNm$	$M(2) = 0\ kNm$ $M(4) = 0\ kNm$

Con lo que los diagramas de esfuerzos cortantes y momentos flectores son:





Según la gráfica, el valor máximo que alcanza el momento flector se encuentra en x = 0, es:

$$M_{max} = 50{,}6\ kNm$$

Problema 10 (***)

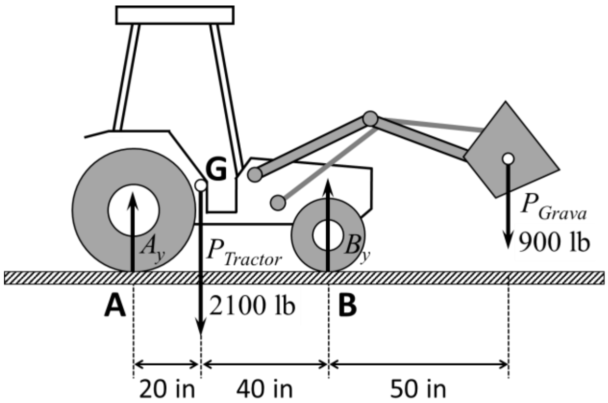
Un tractor como el de la figura tiene una masa de 2 100 lb y se utiliza para levantar 900 lb de grava en su pala delantera. El tractor se apoya en las ruedas traseras y delanteras, que están separadas 60 in. El centro de gravedad del tractor se sitúa 20 in por delante de las ruedas traseras, y durante el transporte el centro de gravedad de la pala cargada se encuentra 50 in por delante de las ruedas delanteras.

Se pide:

a) Dibujar el diagrama del sólido libre indicando correctamente el sentido de todas las fuerzas.

b) Calcular las reacciones en ruedas traseras (apoyo A) y en las delanteras (apoyo B).
Considerar 1 lb = 0,454 kg y 1 in = 2,54 cm.

Solución
a) Diagrama del sólido libre:



Las ruedas son apoyos móviles, por lo que la reacción en A y en B tendrán solo componente vertical (perpendicular a la superficie de apoyo). Además, el peso total del tractor y la grava se reparte entre dos ruedas traseras y otras dos delanteras, lo que habrá que tener en cuenta para hacer los cálculos (la reacción total en las ruedas traseras será $R_A = 2 \cdot A_y$, y en las ruedas delanteras $R_B = 2 \cdot B_y$).

Cambio de unidades al sistema internacional:

$$20\ in \cdot 2{,}54 \frac{cm}{in} = 50{,}8\ cm = 0{,}508\ m$$

$$40\ in \cdot 2{,}54 \frac{cm}{in} = 101{,}6\ cm = 1{,}016\ m$$

$$50\ in \cdot 2{,}54 \frac{cm}{in} = 127\ cm = 1{,}270\ m$$

$$2100\ lb \cdot 0{,}454 \frac{kg}{lb} = 953{,}4\ kg$$

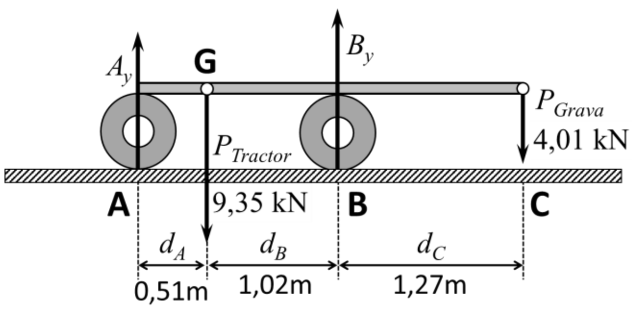
$$900\ lb \cdot 0{,}454 \frac{kg}{lb} = 408{,}6\ kg$$

Las fuerzas peso serán:

$$P = m \cdot g = 953{,}4\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 = 9\ 352{,}9N = 9{,}35\ kN$$

$$P = m \cdot g = 408{,}6\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 = 4\ 008{,}4N = 4{,}01\ kN$$

El diagrama de sólido libre indicando las fuerzas y distancias en las unidades del sistema internacional será:



b) Cálculo de las reacciones en A y en B.

Para calcular la reacción en A se pueden tomar momentos respecto de B, y hay que tener en cuenta que $R_A = 2 \cdot A_y$ ya que el peso se reparte entre dos ruedas.

$$\sum \overrightarrow{M_B} = \vec{0}$$

El momento es el producto vectorial de la fuerza por la distancia. Todas las fuerzas están en el eje y, perpendiculares a las distancias en x, por lo que $M = F \cdot d$. Usaremos el convenio de signos habitual (positivo en sentido antihorario).

$$-P_{Grava} \cdot d_C + P_{Tractor} \cdot d_B - R_A \cdot (d_A + d_B) = 0$$

Sustituyendo valores con las fuerzas en kN y las distancias en m:

$$-4{,}01\ kN \cdot 1{,}27\ m + 9{,}35\ kN \cdot 1{,}02\ m - 2 \cdot A_y \cdot 1{,}53\ m = 0$$

de donde se obtiene

$$A_y = 1{,}45\ kN$$

Como era de esperar, la reacción en A ha salido positiva, lo que significa que va en el sentido que se ha dibujado, de abajo hacia arriba.

Para calcular la reacción en B se pueden tomar momentos respecto de A, teniendo en cuenta ahora que $R_B = 2 \cdot B_y$:

$$-P_{Grava} \cdot (d_A + d_B + d_C) + R_B \cdot (d_A + d_B) - P_{Tractor} \cdot d_A = 0$$

$$-4{,}01\ kN \cdot 2{,}8\ m + 2 \cdot B_y \cdot 1{,}53\ m - 9{,}35\ kN \cdot 0{,}51\ m = 0$$

$$B_y = 5{,}23\ kN$$

El resultado se puede comprobar con la ecuación de equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_y = 0$$

$$2 \cdot A_y - P_{Tractor} + 2 \cdot B_y - P_{Grava} = (2 \cdot 1{,}45 - 9{,}35 + 2 \cdot 5{,}23 - 4{,}01)\ kN = 0\ kN$$

3) **Problemas de Corriente Alterna**

Propuesta de contenidos del bloque D1 de la Comisión Estatal para el curso 2025-26

Bloque D. Preguntas sobre: D1: i) Circuitos de corriente alterna monofásica RLC (cálculo de impedancias, corrientes y tensiones en circuitos serie y paralelo, no mixtos); ii) Diagramas vectoriales y fasoriales; iii) Potencias (cálculo de potencia activa, reactiva y aparente, triángulo de potencias, factor de potencia).

Problema 1 (*)

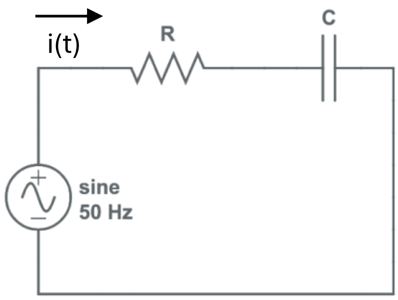
La resistencia de un calefactor está sometida a una tensión de 125 V (eficaces) cuando consume 1000 W de potencia. Para su funcionamiento se conecta a una tensión de red de 220 V (eficaces) y 50 Hz. Considerando que el sistema se corresponde con el circuito de la figura:

a) Obtener la corriente que atraviesa los elementos del circuito.

Con la corriente calculada,

b) Determinar los valores de la capacidad C y de la reactancia capacitiva X_C.

c) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente y dibujar el triángulo de potencia. Determinar el valor del factor de potencia.



Solución

a) Obtener la corriente que atraviesa los elementos del circuito.

$$U_R = 125\ V$$

$$P_R = R \cdot I^2$$

$$U_R = R \cdot I$$

$$P_R = U_R \cdot I; \quad I = \frac{P_R}{U_R} = \frac{1000\ W}{125\ V} = 8\ A$$

Con la corriente calculada,

b) Determinar los valores de la capacidad C y de la reactancia capacitiva X_C.

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220\ V}{8\ A} = 27{,}5\ \Omega$$

$$U_R = R \cdot I; \quad R = \frac{U_R}{I} = \frac{125\ V}{8\ A} = 15{,}63\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{(R^2 + X_C^2)}; \quad X_C = \sqrt{(Z^2 - R^2)} = \sqrt{(27{,}5\ \Omega)^2 - (15{,}63\ \Omega)^2} = 22{,}63\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega\ C}; \quad C = \frac{1}{2\pi\ f\ X_C} = 140{,}66\ \mu F$$

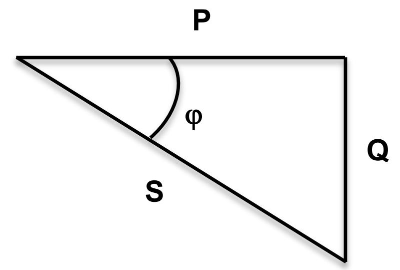
c) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente y dibujar el triángulo de potencia. Determinar el valor del factor de potencia.

$$P = P_R = 1\,000\ W$$

$$Q = X_C \cdot I^2 = 22{,}63\ \Omega \cdot (8\ A)^2 = 1\,448{,}32\ VAr$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1\,760{,}01\ VA$$

$$F.P. = cos\ cos\ \varphi = \frac{P}{S} = 0{,}57\ (adelanto)$$



Problema 2 (*)

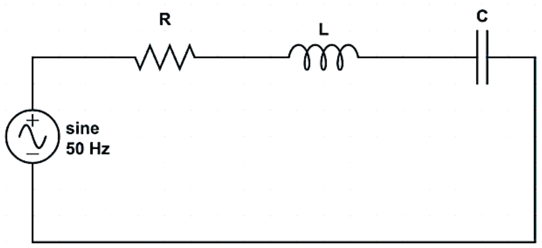
Un circuito de corriente alterna conectado a un generador con una tensión entre sus bornes de valor eficaz de 220 V y 50 Hz, tiene en serie una resistencia de 50 Ω, una bobina de 50 mH y un condensador de 100 μF.

a) Dibujar el circuito y determinar la expresión v(t) del generador.
b) Determinar el valor de la impedancia del circuito. Razonar si se trata de una impedancia inductiva o capacitiva. Dibujar el triángulo de impedancias.
c) Calcular la caída de tensión e intensidad en cada uno de los componentes pasivos.
d) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente.

NOTA: Tómese para todo el problema como origen de fases la tensión del generador.

Solución

a) Dibujar el circuito y determinar la expresión v(t) del generador.



$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50\ Hz = 100\ \pi\ \frac{rad}{s}$$

$$V_{max} = \sqrt{2} \cdot V_{ef} = \sqrt{2} \cdot 220\ V = 311{,}13\ V$$

$$v(t) = V_{max} \cdot sen(\omega t) = 311{,}13 \cdot sen(100\pi t)\ V$$

b) Determinar el valor de la impedancia del circuito. Razonar si se trata de una impedancia inductiva o capacitiva. Dibujar el triángulo de impedancias.

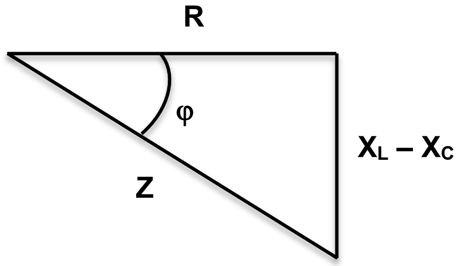
$$X_L = \omega L = 2\pi f \cdot L = 15{,}71\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = 31{,}83\ \Omega$$

$$\vec{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = [50 + j \cdot (15{,}71 - 31{,}83)]\ \Omega$$

$$\vec{Z} = (50 - j \cdot 16{,}12) \cdot \Omega = 52{,}53\angle -17{,}87°\ \Omega$$

Se trata de una impedancia capacitiva dado que $X_c > X_L$ y la impedancia es un número complejo con parte imaginaria negativa.



c) Calcular la caída de tensión e intensidad en cada uno de los componentes pasivos.

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}} = \frac{220\angle 0°\ V}{52{,}53\angle -17{,}87°\ \Omega} = 4{,}19\angle 17{,}87°\ A$$

La intensidad está adelantada respecto a la tensión dado que la impedancia es capacitiva.

Todos los componentes están atravesados por la misma intensidad.

$$\vec{U_R} = R \cdot \vec{I} = 209{,}5\angle 17{,}87°\ V \quad (R = 50\ \Omega)$$

$$\vec{Z_L} = 15{,}71\angle 90°\ \Omega\ ;\ \vec{U_L} = \vec{Z_L} \cdot \vec{I} = 65{,}82\angle 107{,}87°\ V$$

$$\vec{Z_C} = 31{,}83\angle -90°\ \Omega\ ;\ \vec{U_C} = \vec{Z_C} \cdot \vec{I} = 133{,}37\angle -72{,}13°\ V$$

d) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente.

$$R = 50\Omega\ ;\ I = 4{,}19\ A;\quad P = R \cdot I^2 = 877{,}81\ W$$

$$X_L - X_C = -16{,}12\ \Omega\ ;\ Q = Q_L - Q_C = (X_L - X_C) \cdot I^2 = -283\ VAr$$

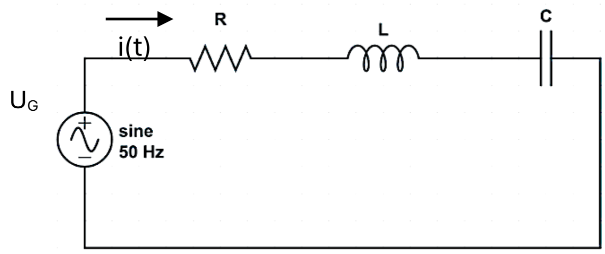
$$Q = 283\ VAr\ (capacitivo)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 922{,}30\ VA$$

Problema 3 (*)

En el circuito mostrado en la figura, donde U_G = 100 V (50 Hz), R = 200 Ω, L = 50 mH y C = 15 μF:

a) Determinar la intensidad proporcionada por la fuente en el circuito mostrado en la figura.
b) Dibujar el diagrama fasorial de tensión.



Solución

a) Determinar la intensidad proporcionada por la fuente en el circuito mostrado en la figura.

$$f = 50\,Hz\,;\;\; L = 50\,mH \;\;;\;\; X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L = 15{,}71\,\Omega$$

$$C = 15\,\mu F \;\;;\;\; X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = 212{,}21\,\Omega$$

$$\vec{Z} = R + j \cdot (X_L - X_C) = (200 - j \cdot 196{,}5)\,\Omega = 280{,}38\angle -44{,}49°\,\Omega$$

$$\vec{I} = \frac{\vec{U}_G}{\vec{Z}} = \frac{100\angle 0°\,V}{280{,}38\angle -44{,}49°\,\Omega} = 0{,}36\angle 44{,}49°\,A$$

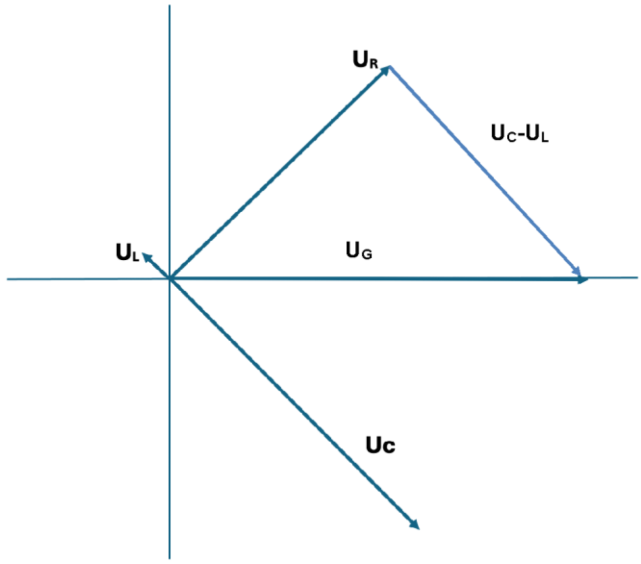
Se ha tomado como referencia la tensión en el diagrama de fasores (la tensión tiene desfase 0 grados). La intensidad está adelantada respecto a la tensión dado que tiene fase positiva y se trata de una impedancia capacitiva ($X_C > X_L$).

b) Dibujar el diagrama fasorial de tensión.

$$R = 200\,\Omega.\,;\;\; \overrightarrow{U_R} = R \cdot \vec{I} = 72\angle 44{,}49°\,V$$

$$\overrightarrow{Z_L} = 15{,}71\angle 90°\,\Omega. \;\;;\;\; \overrightarrow{U_L} = \overrightarrow{Z_L} \cdot \vec{I} = 5{,}66\angle 134{,}49°\,V$$

$$\overrightarrow{Z_C} = 212{,}21\angle -90°\,\Omega. \;\;;\;\; \overrightarrow{U_C} = \overrightarrow{Z_C} \cdot \vec{I} = 76{,}40\angle -45{,}51°\,V$$



Problema 4 **(*)**

Se conecta una impedancia, Z = (40 + j 31,41) Ω a un generador de corriente alterna de 220 V de tensión eficaz y 50 Hz de frecuencia. Calcular:

a) La potencia activa, la potencia reactiva y la potencia aparente y dibuje el triángulo de potencias.
b) La capacidad del condensador (µF) a conectar en paralelo con la impedancia para conseguir un factor de potencia de 0,98.

Solución

a) La potencia activa, la potencia reactiva y la potencia aparente y dibuje el triángulo de potencias.

$$\vec{Z} = (40 + j \cdot 31{,}41)\,\Omega = \;50{,}86\angle 38{,}14°\,\Omega$$

Se trata de una impedancia inductiva dado que es un número complejo con parte imaginaria positiva.

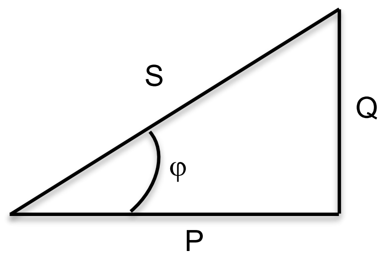
$$\vec{I} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}} = \frac{220\angle 0°\,V}{50{,}86\angle 38{,}14°\,\Omega} = 4{,}33\angle -38{,}14°\,A$$

La intensidad está retrasada respecto a la tensión. Se ha tomado como referencia la tensión en el diagrama de fasores (la tensión tiene desfase 0 grados).

$$U = 220\,V \quad ; \quad I = 4{,}33\,A \quad ; \quad \varphi = 38{,}14° \quad ; \quad P = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot cos\,\varphi \; = 749{,}22\,W$$

$$Q = U \cdot I \cdot sen\varphi = 588{,}31\,VAr\;(inductivo)$$

$$S = U \cdot I = 952{,}6\,VA$$



b) La capacidad del condensador (μF) a conectar en paralelo con la impedancia para conseguir un factor de potencia de 0,98.

$$cos\varphi' = 0{,}98 \quad ; \quad \varphi' = 11{,}48°$$

$$\varphi = 38{,}14°$$

$$Q_C = P \cdot (tag\varphi - tag\varphi') = 436{,}15\,VAr$$

$$f = 50\,Hz \quad ; \quad U = 220\,V \quad ; \quad C = \frac{Q_C}{\omega \cdot U^2} = \frac{Q_C}{2\pi \cdot f \cdot U^2} = 28{,}68\,\mu F$$

Problema 5 (**)

Por una asociación serie de resistencia (R) e inductancia (L) en un circuito eléctrico circula una intensidad de i(t) = 12 cos (1200t + 60°) mA, siendo el voltaje en los extremos del conjunto de v(t) = 0,8 cos (1200 t + 85°) V. ¿Cuál es el valor de la resistencia R y de la inductancia L?

Solución

Se calcula la tensión y la intensidad:

$$\vec{I} = \frac{I_o}{\sqrt{2}}\angle\varphi = \frac{12 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}}\angle 60^{\circ} A$$

$$\vec{U} = \frac{U_o}{\sqrt{2}}\angle\varphi = \frac{0{,}8}{\sqrt{2}}\angle 85°\,V$$

El valor de la impedancia es:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{U}}{\vec{I}} = \frac{\frac{0{,}8}{\sqrt{2}}\angle 85°\,V}{\frac{12 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}}\angle 60°\,A} = 66{,}67\angle 25°\,\Omega$$

Y por consiguiente:

$$\vec{Z} = \frac{\vec{U}}{\vec{I}} = R + j \cdot X = Z \cdot (cos\varphi + j \cdot sen\varphi)$$

R = Z · cos φ = 66,67 · cos 25° = 60,42 Ω

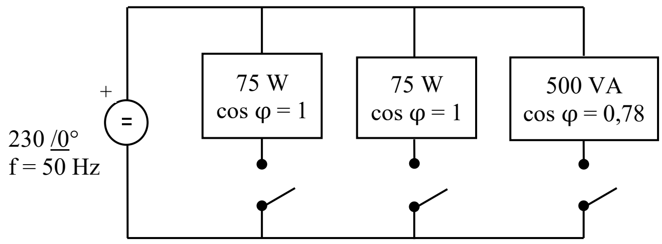
X = Z · sen φ = 66,67 · sen 25° = 28,17 Ω

Como ω = 1.200 rad/s y X = ω · L ; entonces resulta que L = 23,47 mH.

Problema 6 (**)
Un circuito doméstico de 230 V eficaces a 50 Hz alimenta dos lámparas de 75 W con un factor de potencia unidad y un motor que consume 500 VA con un factor de potencia 0,78 inductivo.

a) Dibujar el circuito, representando cada carga mediante una impedancia e incluyendo el interruptor de cada carga.
b) Determinar la corriente total cuando todas las cargas operan de forma simultánea.
c) ¿Qué condensador conectado en paralelo con las cargas dará un factor de potencia unidad?

Solución
a) Dibujar el circuito, representando cada carga mediante una impedancia e incluyendo el interruptor de cada carga.



b) Determinar la corriente total cuando todas las cargas operan de forma simultánea.
Considerando las potencias de cada receptor:

RECEPTOR 1

$$P_1 = 75\,W$$

$$Q_1 = 0\,VAr$$

RECEPTOR 2

$$P_2 = 75\,W$$

$$Q_2 = 0\,VAr$$

RECEPTOR 3

$$P_3 = cos\varphi_3 \cdot S_3 = 0{,}78 \cdot 500\,VA = 390\,W$$

$$cos\,\varphi_3 = 0{,}78 \quad ; \quad \varphi_3 = 38{,}74° \quad ; \quad Q_3 = P_3 \cdot tag\varphi_3 = 312{,}89\,VAr$$

Trabajando con potencias totales:

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 75\,W + 75\,W + 390\,W = 540\,W$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 312{,}89\,VAr$$

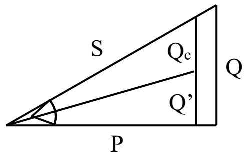
$$S_T = \sqrt{{P_T}^2 + {S_T}^2} = 624{,}1\,VA$$

$$S_T = U \cdot I_T \quad ; \quad I_T = \frac{S_T}{U} = \frac{624{,}1\ VA}{230\ V} = 2{,}71\ A$$

$$cos\ \varphi_T = \frac{P_T}{S_T} = \frac{540\ W}{624{,}1\ VA} = 0{,}865 \quad ; \quad \varphi_T = 30{,}09° \quad ;$$

$$\overrightarrow{I_T} = 2{,}71\angle - 30{,}09°\ A$$

c) ¿Qué condensador en paralelo con las cargas dará un factor de potencia unidad?



$$Q_c = Q' - Q \ ;\ Q' = 0 \ \rightarrow \varphi = 0°$$

$$-\omega C U^2 = -309{,}4 \quad \rightarrow \quad C = \frac{309{,}4}{\omega \cdot U^2} = \frac{309{,}4}{2\pi \cdot 50 \cdot 230^2} = 18{,}6\ \mu F$$

Problema 7 (**)
En una red de alimentación de 230 V y 50 Hz se encuentra conectado un motor asíncrono monofásico que consume una potencia de 7,4 kW con un factor de potencia de 0,8 inductivo. Determinar:

a) Capacidad de la batería de condensadores que hay que conectar en paralelo con el conjunto de receptores para corregir el factor de potencia a 0,95.
b) Intensidad consumida antes de conectar la batería de condensadores.
c) Intensidad consumida después de conectar la batería de condensadores.

Solución

a) Los ángulos de desfase antes y después de conectar la batería son:

$$\varphi_1 = \arccos 0{,}8 = 36{,}97^o$$
$$\varphi_2 = \arccos 0{,}95 = 18{,}19^o$$

La capacidad de la batería se calcula como:

$$C = \frac{P \cdot (tg\varphi_2 - tg\varphi_1)}{-2\pi f \cdot U^2} = \frac{7400 \cdot (tg18{,}19^o - tg36{,}87^o)}{-2\pi 50 \cdot 230^2} = 187{,}64\ \mu F$$

b) Intensidad consumida antes de conectar la batería de condensadores.

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos\varphi} = \frac{7400}{230 \cdot 0{,}8} = 40{,}21\ \text{A}$$

c) Intensidad consumida después de conectar la batería de condensadores.

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos\varphi} = \frac{7400}{230 \cdot 0{,}95} = 33{,}86\ \text{A}$$

Problema 8 (**)
Determinar el triángulo de potencias de un receptor eléctrico al que se le aplica una tensión de u(t) = 290 sen (ωt - 90°) V y absorbe una intensidad de i(t) = 17 sen (ωt - 30°) A.

Solución
La tensión y la intensidad teniendo en cuenta que la función es senoidal:

$$\vec{U} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}\angle\varphi = \frac{290}{\sqrt{2}}\angle -90° = 205{,}06\angle -90°\ V$$

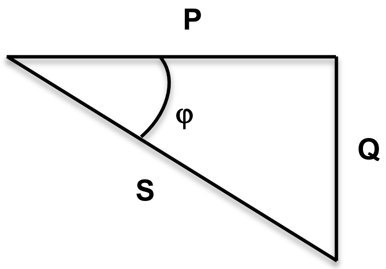
$$\vec{I} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\angle\varphi = \frac{17}{\sqrt{2}}\angle -30° = 12{,}02\angle -30°\ A$$

Teniendo en cuenta que el desfase φ es -60º:

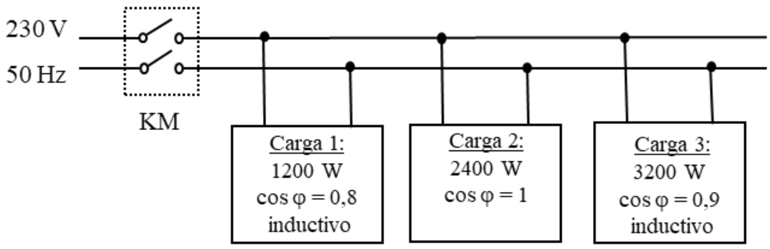
P = U · I · cos φ = 205,06 · 12,02 · cos (-60°) = 1 232,5 W

Q = U · I · sen φ = 205,06 · 12,02 · sen (-60°) = -2 134,6 VAr

S = U · I = 205,06 · 12,02 = 2 464,82 VA



Problema 9 (**)
El circuito de la figura KM representa un interruptor magnetotérmico bipolar que protege la instalación. Determinar la corriente mínima que debe soportar el interruptor para que en condiciones normales de funcionamiento no se dispare. ¿Cuál es el factor de potencia del conjunto de la instalación?



Solución
Utilizando la expresión: P = U· I · cos φ:

Carga 1:

$$cos\ \varphi_1 = 0{,}8 \quad ; \quad \varphi_1 = 36{,}87°$$

$$1\ 200\ W = 230\ V \cdot I_1 \cdot 0{,}8 \quad ; \quad I_1 = 6{,}52\ A$$

$$\vec{I_1} = 6{,}52\angle -36{,}87° = (5{,}21 - j3{,}91)\ A$$

Carga 2:

$$cos\ \varphi_2 = 1 \quad ; \quad \varphi_2 = 0°$$

$$2\ 400\ W = 230\ V \cdot I_2 \cdot 1 \quad ; \quad I_2 = 10{,}43\ A$$

$$\vec{I_2} = 10{,}43\angle 0° = (10{,}43 + j0)\ A$$

Carga 3:

$$\cos\varphi_3 = 0{,}9 \quad ; \quad \varphi_3 = 25{,}84°$$

$$3\,200\,W = 230\,V \cdot I_3 \cdot 0{,}9 \quad ; \quad I_3 = 15{,}45\,A$$

$$\overrightarrow{I_3} = 15{,}45\angle -25{,}84° = (13{,}90 - j6{,}73)\,A$$

La intensidad mínima que debe soportar el interruptor KM coincide con las 3 cargas en funcionamiento simultáneo. Por tanto, por aplicación de 1ª ley de Kirchhoff, dicha intensidad es la suma fasorial de la correspondiente a las cargas.

$$\overrightarrow{I_T} = \overrightarrow{I_1} + \overrightarrow{I_2} + \overrightarrow{I_3} = (5{,}21 - j\,3{,}91)\,A + (10{,}43 + j\,0)\,A + (13{,}90 - j\,6{,}73)\,A$$

$$\overrightarrow{I_T} = (29{,}54 - J\,10{,}64)\,A = 31{,}39\angle -19{,}80°\,A$$

El factor de potencia se obtiene como cos φ = cos 19,81 = 0,94 (inductivo) o bien como:

$$P_T = 1\,200 + 2\,400 + 3\,200 = 6\,800\text{ W}$$

$$6\,800\text{ W} = 31{,}39\text{ A} \cdot 230\text{ V} \cdot \cos\varphi \;;\; \text{fdp} = \cos\varphi = 0{,}94\text{ (ind)}$$

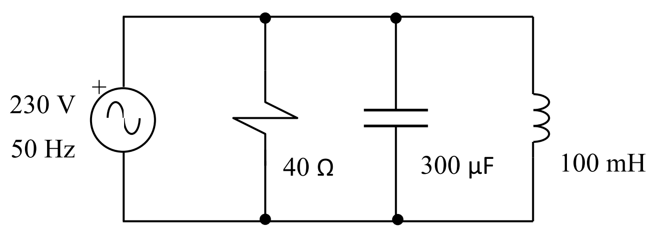
Problema 10 (**)

Un generador de frecuencia variable de corriente alterna a 230 V y 50 Hz, alimenta un circuito RLC paralelo formado por una R = 40 Ω, una inductancia de L = 100 mH y un condensador de C = 300 μF, calcular:

a) La intensidad de corriente que circula por cada una de las ramas del circuito.
b) El factor de potencia del circuito.
c) Las potencias activa, reactiva y aparente del circuito.
d) El valor de la frecuencia necesaria para que el factor de potencia de este circuito sea la unidad.

Solución

a) La intensidad de corriente que circula por cada una de las ramas del circuito.



$$\overrightarrow{I_R} = \frac{\vec{V}}{R} = \frac{230\angle 0°\,V}{40\angle 0°\,\Omega} = 5{,}75\angle 0°\,A = (5{,}75 + j \cdot 0)\,A$$

$$X_L = wL = 2\pi \cdot 50\,Hz \cdot 100\,mH = 100\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3}\Omega = 10\pi\,\Omega$$

$$\overrightarrow{I_L} = \frac{\vec{V}}{\overrightarrow{Z_L}} = \frac{230\angle 0°\,V}{10\pi\angle 90°\,\Omega} = 7{,}32\angle -90°\,A = (0 - j \cdot 7{,}32)\,A$$

$$X_C = \frac{1}{wC} = \frac{1}{2\pi \cdot 50\,Hz \cdot 300 \cdot 10^{-6}\,F} = 10{,}61\,\Omega$$

$$\overrightarrow{I_C} = \frac{\vec{V}}{\overrightarrow{Z_C}} = \frac{230\angle 0°\ V}{10{,}61\angle -90°\ \Omega} = 21{,}68\angle 90°\ A = (0 + j \cdot 21{,}68)\ A$$

$$\overrightarrow{I_T} = \overrightarrow{I_R} + \overrightarrow{I_L} + \overrightarrow{I_C} = 5{,}75 - j \cdot 7.32 + j \cdot 21{,}68 = (5{,}75 + j \cdot 14{,}36)\ A = 15{,}47\ \angle 68{,}18°\ A$$

La intensidad está adelantada respecto a la tensión. Se ha tomado como referencia la tensión en el diagrama de fasores (la tensión tiene desfase 0 grados).

b) El factor de potencia del circuito.

$$cos\varphi_T = cos\ (68{,}18°) = 0{,}37\ (capacitivo)$$

c) Las potencias activa, reactiva y aparente del circuito.

$$P_T = V \cdot I_T \cdot cos\varphi_T = 230\ V \cdot 15{,}47\ A \cdot cos(68{,}18°)\ = 1\ 322{,}5\ W$$

$$Q_T = V \cdot I_T \cdot sen\varphi_T = 230\ V \cdot 15{,}47\ A \cdot sen(68{,}18°)\ = 3\ 303{,}18\ VAr\ (capacitivo)$$

$$S_T = V \cdot I_T = 230\ V \cdot 15{,}47\ A = 3\ 558{,}1\ VA$$

d) El valor de la frecuencia necesaria para que el factor de potencia de este circuito sea la unidad.
Para $cos\varphi_T = 1 \quad \rightarrow \quad X_L = X_C$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{100 \cdot 10^{-3} H \cdot 300 \cdot 10^{-6}\ F}} = 29{,}06\ Hz$$

4) Problemas de Sistemas Automáticos

Propuesta de contenidos del bloque F1 de la Comisión Estatal para el curso 2025-26

Bloque F. Preguntas sobre F1: i) **[1]** problemas sencillos de simplificación de sistemas mediante álgebra de bloques, considerando la relación entre la salida y la entrada de un sistema con conexiones en serie, en paralelo, retroalimentación positiva y negativa y sin cambios de puntos de bifurcación; ii) **[2]** cuestiones teórico-prácticas sobre las ventajas de los sistemas de control en lazo cerrado, **[3]** el papel que juega cada elemento en los sistemas de lazo cerrado, como el controlador o regulador, **[4]** la identificación de estos elementos en un sistema real y el **[5]** significado de la estabilidad o inestabilidad de un sistema de control, conociendo **[6]** por qué un sistema estable en lazo abierto puede ser inestable en lazo cerrado; **[7]** los sensores se abordarán de forma general, sin necesidad de analizar el principio de funcionamiento de cada uno de ellos. No se recomienda preguntar cuestiones con el criterio de Routh.

Resumen de los contenidos

[1] Problemas sencillos de simplificación de sistemas mediante álgebra de bloques.
[2] Cuestiones teórico-prácticas sobre las ventajas de los sistemas de control en lazo cerrado (S.C.L.C.).
[3] Papel que juega cada elemento en un S.C.L.C.
[4] Identificación de los elementos de un S.C.L.C. en un sistema real.
[5] Significado de la estabilidad o inestabilidad de un sistema de control.
[6] Conocer por qué un sistema estable en lazo abierto puede ser inestable en lazo cerrado.
[7] Conocimiento de los sensores sin analizar el principio de funcionamiento.

Nota: en cada problema se indica el contenido tratado mediante el número de epígrafe entre corchetes [X].

Comentarios sobre el epígrafe [4]: Representación de sistemas mediante diagramas de bloques.

Estos problemas son muy útiles para introducir al alumnado en el estudio de los sistemas de control, conocer su utilidad y los campos a los que puede aplicarse. Las cuestiones consisten en representar el sistema de control propuesto como ejemplo mediante un diagrama de bloques normalizado. Para ello, se deben asociar las distintas partes del sistema propuesto con cada bloque y cada señal del diagrama de bloques. Se considerará diagrama de bloques normalizado el siguiente:

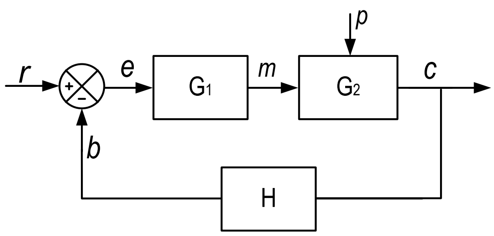


Fig. 4.1.- Diagrama de bloques normalizado de un sistema de control en lazo cerrado.

Los rectángulos representan a los elementos que forman el sistema de control, como motores, cilindros, amplificadores, sensores, etc. con sus variables de entrada o de control y de salida en letra minúsculas. Las flechas muestran el sentido del flujo de la información. El círculo o punto de suma se usa para comparar la entrada con la señal de realimentación. Si bien las variables en un diagrama de bloques representan magnitudes físicas, como velocidad, fuerza o temperatura, en el sistema real pueden estar representadas en un soporte diferente, como una tensión o un dato digital.
Es importante recordar la notación estándar de las variables y de los bloques de un sistema de control de lazo cerrado:

- ***c:*** es la salida, la variable controlada o la respuesta del sistema: temperatura, velocidad, presión, ritmo cardiaco (sistemas biológicos), inflación (economía), etc.
- ***r***: es la señal de referencia, consigna o entrada del sistema. Su significado es el valor deseado de la salida del sistema.
- ***H:*** está formado por los elementos de medida de la salida: sondas de temperatura, de presión, medidores de velocidad, etc. Permite la realimentación del sistema.
- ***b:*** es la medida de la señal de salida.

- ***e:*** es la señal actuante, error o una función de este.
- ***m*** es la variable manipulada o de control. Actúa sobre el sistema para modificar su salida.
- ***G₁***: es el controlador o regulador. Actúa sobre la planta según el error detectado. Se puede considerar como la parte inteligente del sistema de control.
- ***G₂***: es la planta o sistema controlado.
- ***p***: es la perturbación. Se trata de una señal externa al sistema de valor desconocido que puede modificar la salida prevista.

El círculo es un **punto de suma**. ***e*** = ***r*** – ***b.*** Las señales que llegan al punto de suma deben ser de la misma naturaleza. A veces se prescinde de la cruz, colocando los signos + y – fuera del círculo.
Los sistemas pueden ser continuos (sus variables toman cualquier valor dentro de un intervalo), discretos (solo determinados valores, como conexión o desconexión, o todo-nada) o una mezcla de ambos.

Notas sobre la representación de los diagramas de bloques.
El diagrama de la fig. 4.2 muestra el flujo de las señales sin especificar la naturaleza de las señales usadas como soporte. En algunos textos se incluye el bloque captador para convertir la señal de consigna, establecida mediante un potenciómetro, teclado, etc., a un determinado tipo de señal para ser comparada con la de realimentación. En el ejemplo de la fig. 2 la velocidad de consigna se convierte en G3 a tensión. El diagrama de la figura 1 es el más usado en ingeniería de control, mientras que el de la figura 2 es más fácil de interpretar.

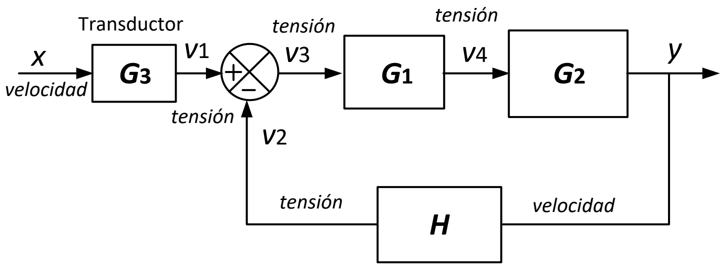
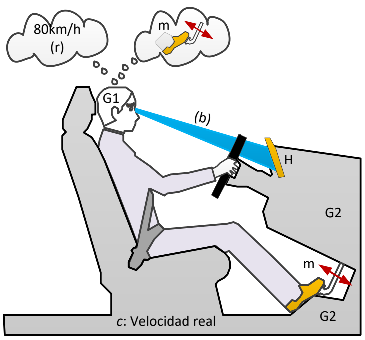


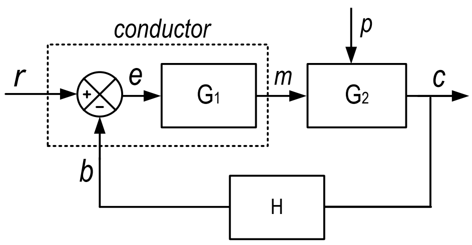
Fig. 4.2- Diagrama de bloques incluyendo el transductor para la variable de consigna.

Las preguntas de este epígrafe ([4] Identificación de sistemas) requieren de cierto grado de abstracción. Por ello, se recomienda trabajar con el alumnado la identificación de los componentes mediante distintos ejemplos de la vida cotidiana, asignándoles los bloques correspondientes del diagrama normalizado.

Problema 1 [4] **(**)**
Considerar la acción de control que lleva a cabo un conductor para mantener la velocidad de un vehículo a 80 km/h en una carretera recta con tramos llanos, subidas y bajadas. La velocidad es controlada mediante el pedal del acelerador y medida con un velocímetro digital. Se pide:

a) Identificar las señales y los bloques del diagrama de bloques mostrado con el sistema formado por el conductor, el vehículo y las características de la carretera.
b) En el sistema propuesto, ¿qué representaría la perturbación?





Solución

a)

c: la variable controlada es la velocidad real del vehículo.

G$_2$: es la planta o sistema a controlar. Estaría formada por los elementos del vehículo: motor, peso, aerodinámica, etc.

m es la variable manipulada o de control. Sería la posición del acelerador.

r: valor deseado de la salida, 80 km/h.

H: elementos de medida de la salida. Estaría formado por el sistema electrónico de medida de velocidad y por la capacidad visual del conductor.

b: es la velocidad percibida por el conductor.

e: es la diferencia entre la velocidad percibida por el conductor y los 80 km/h de referencia.

G$_1$: es el controlador o regulador. Esta función la realiza el conductor, actuando sobre el acelerador en función del error de velocidad ***e***.

b)

p: perturbación. Representaría las condiciones del terreno: pendientes, viento, etc. Cualquier variable externa que modifique las condiciones de un régimen estable.

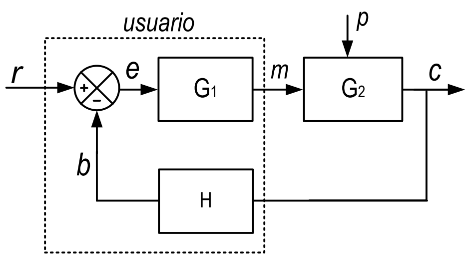
Problema 2 [4] (**)

Con un grifo de cocina monomando se puede tener agua fría colocando la maneta en un extremo, muy caliente situándola en el otro extremo o una mezcla de ambas en el centro. El agua caliente procede de un termo eléctrico cuya temperatura a su salida no es constante. Considere la acción de control que lleva a cabo una persona para mantener manualmente la temperatura del agua en un valor constante como un sistema de control en lazo cerrado. Se pide:

a) Representar el sistema mediante un diagrama de bloques normalizado.
b) Relacionar las variables y los bloques del diagrama con el sistema descrito.

Solución

a)



b)

c: la variable controlada es la temperatura del agua.

m: la variable manipulada o de control es la posición angular de la maneta.

G$_2$: es la relación entre la temperatura del agua y la posición de la maneta. Todos los elementos de los que depende dicha relación formarán parte de *G*$_2$, como válvula monomando, temperaturas del agua caliente y fría, sus presiones, etc. En definitiva, el sistema hidráulico.

r: es el valor deseado de la salida. Dependerá de la sensibilidad de la persona usuaria.

H: los elementos de medida de la salida, temperatura, serán las manos de la persona.

b: es la temperatura percibida por el usuario.

e: es la diferencia entre la temperatura percibida y la deseada.

G$_1$: el control lo realiza la persona usuaria actuando sobre el mando en función del error o diferencial de temperaturas.

p: la perturbación vendría representada principalmente por cambios en la temperatura del temo de agua caliente, aunque también por cualquier cambio en las características del sistema hidráulico.

Problema 3 [4] (**)

La figura muestra una cámara climática destinada a ensayos térmicos de componentes eléctricos. La temperatura de la cámara, *T*, es regulada en lazo cerrado mediante una resistencia calefactora cuya potencia, *P,* es suministrada por un circuito electrónico. Sabiendo que $P = A\cdot(T^*-T)$, donde T^* es la temperatura de referencia y *A* la ganancia del controlador y que en régimen permanente $T = T_{amb},+ K \cdot P$, donde T_{amb} es la temperatura ambiente y K un parámetro constante de la cámara, se pide:

a) Completar el diagrama de bloques mostrado, indicando sobre él la variable manipulada, la señal de error, el controlador y la planta.
b) Añadir un nuevo bloque al diagrama para representar el sensor de temperatura de la cámara.
c) ¿Se podría considerar la T_{amb} como una perturbación? Justificar la respuesta.

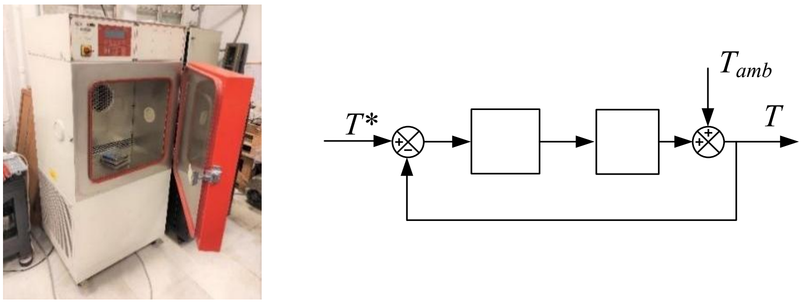
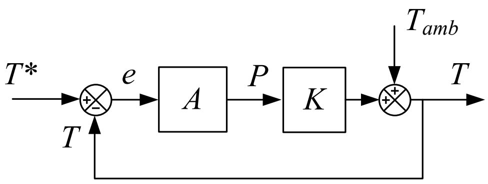


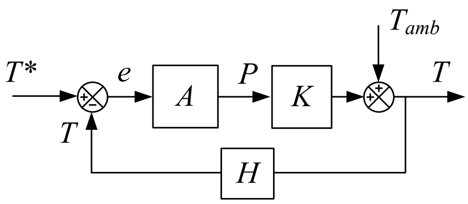
Figura 4.3.- Cámara climática y su diagrama de bloques

Solución

a) La relación entre las variables se deduce de la lectura del enunciado:
$P = A \cdot (T^* - T)$ y $T = T_{amb},+ K \cdot P$. Por lo tanto,



b) El bloque *H* siempre comprende los elementos de medida o realimentación.



c) Sí, ya que tiene las características de una perturbación: es una variable que no tiene relación alguna con el sistema y que afecta a la salida de este.

Comentarios sobre el epígrafe [1]: Algebra de bloques

Estos problemas consisten en obtener la relación matemática entre las señales de un sistema de control o función de transferencia. Lo más habitual es que se pida la relación entre la salida y la entrada del sistema, pero también es de interés la relación entre el error y la entrada o la salida o el efecto de las ganancias sobre el error.

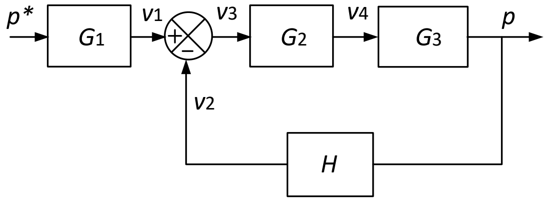
La simple obtención de una relación matemática a partir de un diagrama sin tener en cuenta el contexto real carece de valor para el alumnado de bachillerato. Para que dicha relación aporte conocimiento los enunciados deben estar contextualizados y corresponder a sistemas reales sencillos. Por ello es conveniente que el alumnado haya trabajado antes el paso de sistemas reales a diagramas de bloques del epígrafe [4].

Problema 4 [1] (*)

El diagrama de bloques mostrado corresponde al control de presión de un cilindro hidráulico. El transductor G_1 convierte la presión deseada, p^*, introducida mediante un teclado, en la tensión v_1. En el punto de suma se resta a v_1 la tensión v_2, procedente de un sensor de presión colocado en el circuito hidráulico, y la diferencia, v_3, se amplifica en G_2 y se aplica a la válvula G_3 que controla finalmente la presión del pistón. Se pide:

a) Relación p/p*.

b) Si en régimen permanente G_2 = 10 V/V, $G_3 = 25 \cdot 10^5$ Pa / V y $H = 0{,}1 \cdot 10^{-5}$ V / Pa, obtener G_1 para que la presión del cilindro, p, sea igual a la de consigna p*.



Solución

a)

$$p = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot p^* - G_2 \cdot G_3 \cdot H \cdot p$$
$$p(1 + G_2 \cdot G_3 \cdot H) = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot p^*$$
$$\frac{p}{p^*} = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{1 + G_2 \cdot G_3 \cdot H}$$

O bien,

$$v_1 = p^* \cdot G_1$$
$$v_3 = v_1 - v_2 = p^* \cdot G_1 - p \cdot H$$
$$p = v_3 \cdot G_2 \cdot G_3 = (p^* \cdot G_1 - p \cdot H) \cdot G2 \cdot G3$$
$$p(1 + H \cdot G_2 \cdot G_3) = p^* G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$$
$$\frac{p}{p^*} = \frac{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{1 + G_2 \cdot G_3 \cdot H}$$

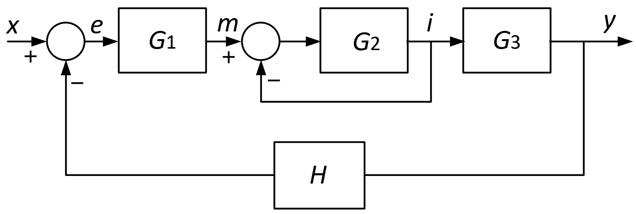
b) Si el error es cero, *p* / *p** = 1:

$$\frac{p}{p^*} = 1 \quad \Rightarrow \quad G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = 1 + G_2 \cdot G_3 \cdot H \quad \Rightarrow$$
$$G_1 = \frac{1 + G_2 \cdot G_3 \cdot H}{G_2 \cdot G_3} \frac{V}{Pa} = \frac{1 + 10 \cdot 25 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-5}}{10 \cdot 25 \cdot 10^5} \frac{V}{Pa} = 0{,}104 \cdot 10^{-5} \frac{V}{Pa}$$

Problema 5 [1] (*)

El siguiente diagrama de bloques corresponde al control de velocidad de dos lazos de un motor eléctrico. *x* es la velocidad de referencia, *y* la velocidad real, *e* el error de velocidad, *i* la intensidad aplicada al motor, G_1 el controlador, G_2 el lazo de control de intensidad, G_3 el motor y *H* el medidor de velocidad (encoder). En régimen permanente, G_1 = 50 A / rpm, G_2 = 10, G_3 = 2 rpm / A y *H* =1. Se pide:

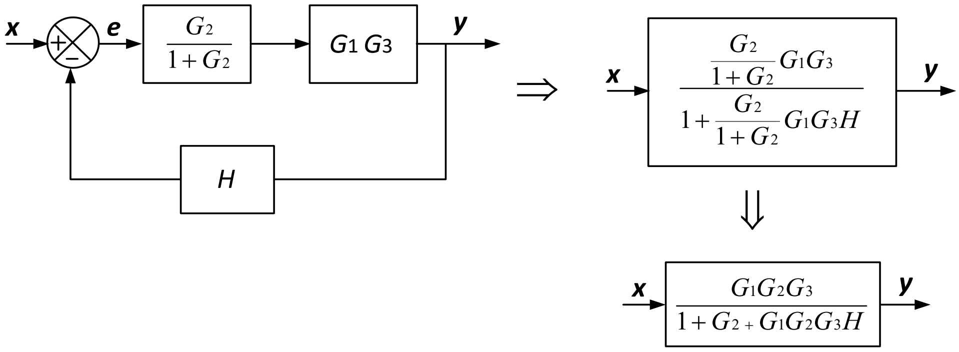
a) Relación entre la velocidad real y la de consigna y / x.
b) Error de velocidad (x-y) en rpm cuando x =1000 rpm.
c) ¿Qué valor debe tomar H para que el error de velocidad sea cero?



Solución

a) Método 1: mediante reducciones sucesivas.
Sabiendo que la relación *i* / *m* es:

$$\frac{i}{m} = \frac{G_2}{1+G_2}$$



Método 2.- De forma directa.

$$y = G_1G_2G_3x - G_2G_3\frac{y}{G_3} - G_1G_2G_3H\,y$$
$$y(1+G_2+G_1G_2G_3H) = G_1G_2G_3\,x$$
$$\frac{y}{x} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2+G_1G_2G_3H}$$

b) Sustituyendo valores:

$$y = 1000\frac{50{\cdot}10{\cdot}2}{1+10+50{\cdot}10{\cdot}2{\cdot}1}rpm = 989{,}1\,rpm$$

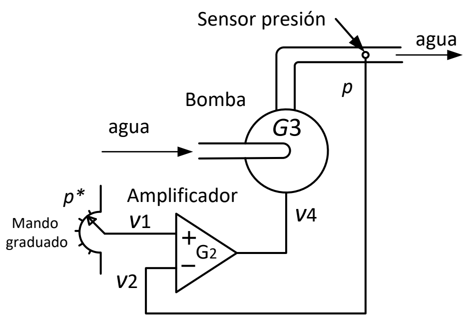
El error de velocidad es 1000-989,1 = 10,9 rpm.

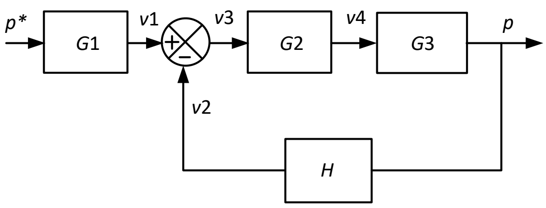
c) Para que el error de velocidad sea cero, *y* = *x*. Por tanto,

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_2+G_1G_2G_3H} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1+G_2+G_1G_2G_3H = G_1G_2G_3 \quad \Rightarrow$$
$$H = \frac{G_1G_2G_3 - 1 - G_2}{G_1G_2G_3} = \frac{50{\cdot}10{\cdot}2-1-10}{50{\cdot}10{\cdot}2} = 0{,}989$$

Problema 6 [1] (*)

La figura de la izquierda muestra de forma simplificada un sistema para mantener constante la presión del agua en una vivienda. La presión deseada, *p**, fijada mediante un potenciómetro y convertida a la tensión v_1 es comparada con la tensión v_2; la cual procede del sensor de presión colocado a la salida de la bomba. La diferencia de tensiones $v_1 - v_2$ es amplificada en G_2 y aplicada al motor de la bomba. G_3 representa la relación entre la presión de la bomba y la tensión v_4. En la figura de la derecha se muestra el diagrama de bloques. Obtener la relación p/p*.





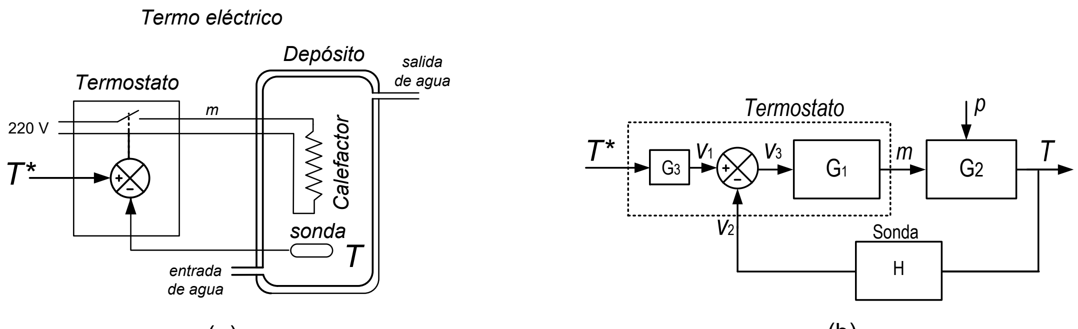
Solución

$$p = G1 \cdot G2 \cdot G3 \cdot p^* - G2 \cdot G3 \cdot H \cdot p$$
$$p(1 + G2 \cdot G3 \cdot H) = G1 \cdot G2 \cdot G3 \cdot p^*$$
$$\frac{p}{p^*} = G1 \frac{G2 \cdot G3}{1 + G2 \cdot G3 \cdot H}$$

Problema 7 [1], [3] (**)

La figura muestra en (a) el esquema de un termo eléctrico y en (b) su diagrama de bloques. El termo consta de un depósito de agua, una resistencia eléctrica calefactora, una sonda H que mide la temperatura *T* del agua del depósito y la convierte a tensión con ganancia H = 0,1V / ºC y un termostato. El termostato tiene un potenciómetro con mando giratorio para fijar la temperatura de consigna *T** en ºC y una salida de tensión *m* para la resistencia calefactora. Se pide:

a) Obtener la relación T/T* sin considerar la perturbación p.
b) Si en régimen permanente G1 = 10 W/V, G2 = 23 ºC / W y G3 = H = 0,1V / ºC, obtener el error de temperatura (T*-T) cuando la temperatura de consigna es 60 ºC.
c) ¿Qué función cumple el bloque G3 en el diagrama?
d) En el sistema térmico propuesto, ¿qué representaría la perturbación?



(a) (b)

Solución

a)

$$T = G_1 G_2 G_3 T^* - G_1 G_2 H T$$
$$T(1 + G_1 G_2 H) = G_1 G_2 G_3 T^*$$
$$\frac{T}{T^*} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H}$$

b) Para *T** = 60 ºC,

$$T = T^* \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H} = 60 \frac{10 \cdot 23 \cdot 0.1}{1 + 10 \cdot 23 \cdot 0.1} {}^\circ C = 57{,}5^\circ C$$

Por tanto, el error será *T**-*T* = 57,5 – 60 = -2,5 ºC.

c) El bloque G3 convierte la temperatura marcada en el mando giratorio a tensión mediante un potenciómetro. La temperatura, una vez convertida a tensión puede compararse con la tensión generada por el sensor H al ser de la misma naturaleza.

d) En este caso, la señal de perturbación, *p*, estaría asociada a la apertura de un grifo, ya que al entrar agua fría modificaría la salida. Esta señal es externa al sistema y de valor desconocido. También podría considerarse como perturbación los cambios en la temperatura ambiente, ya que pueden afectar a la temperatura del agua del interior del termo.

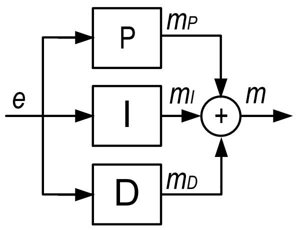
Controladores [3]

Estos problemas se limitarán a los controladores más simples, que por orden de importancia son el proporcional, el integral y el derivativo. El regulador o controlador PID es el más empleado en la industria. Para que el alumnado pueda entender fácilmente el funcionamiento de los controladores integral y derivativo le será de gran ayuda comprender antes los conceptos matemáticos de derivada y de integral de una función. Independientemente del tipo, es fundamental conocer el papel que juega el regulador en un sistema de control en lazo cerrado.

Problema 8 [3] **(*)**

Enumerar y comentar brevemente las principales características de los controladores proporcional, integral y derivativo.

Solución



Acciones P, I y D en un regulador PID

Acción proporcional:

- La acción de control o variable manipulada (m_P) es proporcional al error.
- No asegura que el error en régimen permanente sea cero, ya que si el error fuera cero, la variable manipulada también sería cero.
- Responde instantáneamente al error.

Acción integral:

- La acción de control o variable manipulada (m_I) acumula el error en el tiempo (integral del error). Si el error se mantiene en el tiempo, la variable manipulada crecerá (o decrecerá según el signo del error) hasta anular el error o llegar a la saturación.
- Posibilita que en régimen permanente el error sea cero.
- Es una acción retardada. Requiere de tiempo para ser efectiva.

Acción derivativa:

- La acción de control o variable manipulada (m_D) es proporcional a la velocidad de cambio del error (a su derivada).
- Tiene efecto anticipativo.
- Sólo actúa en régimen transitorio.

Problema 9 [3] **(***)**

Una ducha convencional tiene un grifo monomando con el que se puede tener agua fría, caliente o una mezcla de ambas según la posición de la maneta. Considere la siguiente acción de control que lleva a cabo una persona para mantener manualmente la temperatura del agua en un valor constante: primero coloca el mando en una posición intermedia y comprueba que el agua sale fría. A continuación, mueve el mando para aumentar la temperatura y vuelve a comprobar que el agua sigue saliendo fría, repitiendo este proceso hasta alcanzar la temperatura ideal. Se pide:

a) Justificar qué tipo de control está realizando la persona: ¿P, PD o PI?
b) Una vez conseguida la temperatura óptima, la persona nota que sin modificar el mando el agua se va enfriando. Entonces mueve la maneta rápidamente en previsión de una disminución más acentuada de la temperatura. ¿Qué acción de control está realizando la persona ahora? Justificar la respuesta.

Solución

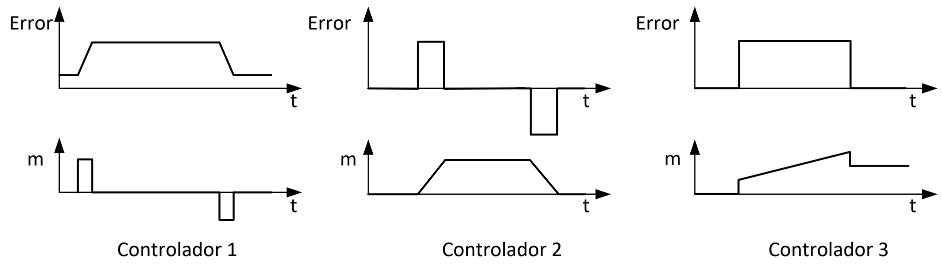
a) Si la persona realizase un control solo proporcional, el giro de la maneta sería proporcional al error. Por tanto, un error cero no es posible ya que ello supondría no mover la maneta, dejándola en su posición inicial.
Si fuese un PD tampoco se eliminaría el error. La acción derivativa solo actúa ante cambios del error.

La acción integral sí permite que el error llegue a ser cero. La persona, tras comprobar que la temperatura no es la ideal, vuelve a actuar sobre el mando las veces necesarias hasta lograr la temperatura ideal. Esta acción puede ser interpretada como la integral del error, cuyo valor va aumentando mientras que el error sea distinto de cero (La integral de una constante es una rampa).

b) En este caso, la persona realiza una acción claramente derivativa, ya que actúa en función del cambio de la salida y no del valor de esta. La persona pretende adelantarse a un cambio más brusco de la temperatura. La acción derivativa de un controlador industrial intenta reproducir este comportamiento.

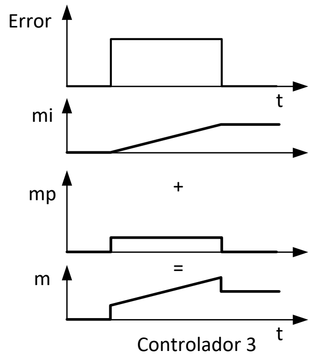
Problema 10 [3] **(**)**

La figura muestra la entrada (error) y la salida (m) de tres tipos de controladores o reguladores utilizados en sistemas de control de lazo cerrado. Indicar qué tipo de controlador es usado en cada uno de los casos y justificar las respuestas



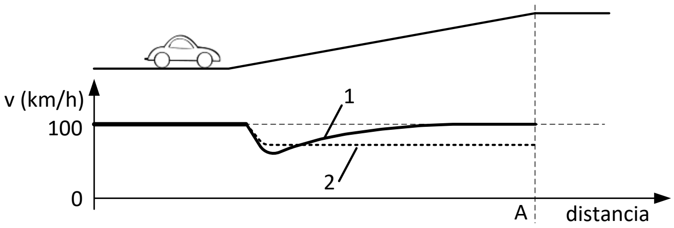
Solución

El controlador 1 es de tipo derivativo (D), ya que la señal *m* es proporcional a la derivada de la señal de error. No tiene acción proporcional ya que *m* es cero excepto en los cambios del error.
El controlador 2 es de tipo integral (I). La salida *m* es proporcional al área bajo la curva de error.
El controlador 3 es un proporcional e integral (PI), ya que la salida está formada por la suma de la integral del error, correspondiente a la zona inclinada, y la componente proporcional, según se indica en la siguiente gráfica.

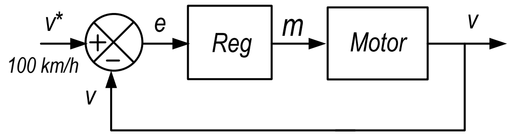


Problema 11 [3] **(***)**

La figura muestra un vehículo circulando con el control automático de la velocidad de crucero activado y fijado a 100 km/h. Las curvas 1 y 2 muestran las velocidades, primero en llano y después en pendiente para dos controladores o reguladores diferentes. En llano, la velocidad es prácticamente 100 km/h en ambos casos. Con el regulador 1 la velocidad decrece al tomar la pendiente y posteriormente retoma la velocidad de 100 km/h, mientras que con el regulador 2 la velocidad se mantiene durante toda la pendiente en un valor inferior a 100 km/h.
¿Qué tipo de regulador usa el control de crucero en el caso 1 y en el caso 2: P, PI o PD? Justificar la respuesta.



Solución

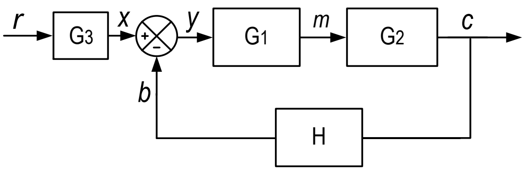


Control de la velocidad de crucero

En terreno llano se requiere poca potencia del motor, lo que se traduce en un valor bajo de la variable manipulada *m* (combustible) y en un error, *e*, pequeño. Por eso, para cualquiera de los reguladores, la velocidad se aproxima a los 100 km/h de referencia.
Al tomar la pendiente, la potencia del motor debe aumentar para mantener la velocidad, lo que supone el aumento de *m*. El valor del error, *e*, depende del tipo de regulador: Si es un proporcional, el error debe aumentar proporcionalmente al aumento de potencia, disminuyendo entonces la velocidad. Esto se corresponde con el caso 2. Si es un PI, debido a la acción integral la salida del regulador irá aumentado mientras el error, *e*, sea positivo (efecto integral); aumentando el combustible y la potencia hasta alcanzar los 100 km/h. Este es el caso 1. Por último, el regulador PD solo podría corresponder a la gráfica 2, ya que ni la acción P ni la D hacen que el error se anule en régimen permanente.
También podría considerarse válida la respuesta basada en el error en régimen permanente, que es cero solo en los reguladores con acción integral. Por tanto, la gráfica 1 corresponde a un PI o PID y la 2 a un P o PD.

Problema 12 [2], [3], [4], [7] (**)

a) En qué bloque o bloques del diagrama adjunto se incluirían los siguientes elementos: motor eléctrico, cilindro neumático, controlador proporcional, fotocélula, potenciómetro, sonda PTC, tacómetro, regulador PID, termo eléctrico y teclado para introducir valores numéricos.
b) Indicar dos ventajas y dos inconvenientes de los sistemas de control de lazo cerrado frente a los de lazo abierto.



Solución

a)

G1	G2	G3	H
Regulador PID Controlador P	Motor Termo eléctrico Cilindro neumático	Potenciómetro Teclado *	Potenciómetro Sonda PTC Fotocélula

* El teclado numérico permite introducir un valor de consigna o referencia cuya salida, analógica o digital se compararía con la señal de realimentación *b*.

b)

Ventajas de los S.C.L.C.:

1.- Mayor precisión al medir la salida, lo que le permite poder corregir los posibles errores.

2.- Menos sensibles a las perturbaciones y a los cambios de sus parámetros.
3.- Respuesta más rápida.
Desventajas:
1.- Posibilidad inestabilidad. Si por algún motivo, como retardos o desfases, la señal de realimentación tiene signo contrario al de la entrada, se produciría realimentación positiva y el sistema puede volverse inestable.
2.- Son más complejos de diseñar y de controlar.

Problema 13 [5], [6] (**)
¿Un sistema que es estable a lazo abierto pueda ser inestable a lazo cerrado? Justificar la respuesta.

Solución
Sí. Un sistema que es estable en lazo abierto puede volverse inestable en lazo cerrado.
En los sistemas de control en lazo cerrado, en condiciones normales, la señal de realimentación se resta a la entrada buscando con ello la estabilidad del sistema ante una perturbación. Pero si debido a retardos del sistema la señal de realimentación se invierte, la resta se convierte en suma con el resultado de un aumento ilimitado de la señal de control.
En un sistema de lazo abierto los retardos solo pueden generar inestabilidad si se realimenta.
También puede ocurrir lo contrario; que un sistema inestable en lazo abierto se estabilice mediante la realimentación. Ejemplos de ello son el péndulo invertido o la levitación magnética que son inestables, pero pueden estabilizarse mediante la realimentación y un control adecuado.

Problema 14 [2], [7] (**)
El alumbrado de un jardín se controla de forma automática mediante un sistema de lazo abierto compuesto por un interruptor de corte general, un programador horario para establecer las horas de encendido y apagado y un relé para el encendido de las lámparas controlado por el programador. Se pide:
a) Indicar qué elementos deben añadirse y cuáles deben eliminarse para convertirlo en un sistema de lazo cerrado.
b) ¿Qué ventajas tiene el funcionamiento del alumbrado en lazo cerrado sobre el de lazo abierto?

Solución
a)
Elementos a añadir: sensor de luminosidad (LDR o fototransistor), comparador (Amplificador operacional) y potenciómetro para fijar la luminosidad de referencia.
Elementos a eliminar: interruptor horario. El encendido de las luces no depende de la hora sino del nivel de iluminación, que es medido con el sensor de luminosidad.

b) Al ser de lazo cerrado, la salida (luminosidad) se mantiene independientemente de las perturbaciones como nublados, cambios de hora, etc.

Problema 15 [5] (**)
Durante el aprendizaje de montar en bicicleta se suele perder el equilibrio al mover el manillar en el sentido contrario al necesario para mantener la estabilidad. Se pide:
Explicar la relación que existe entre el manejo de la bicicleta durante el aprendizaje y la condición de estabilidad de un sistema en lazo cerrado.

Solución
Se recordará que: *Un sistema es estable cuando ante una perturbación la realimentación actúa en sentido contrario para contrarrestarla; en cambio, es inestable si lo hace en el mismo sentido.*
Cuando un ciclista conduce con destreza corrige la inclinación de la bicicleta con movimientos del manillar y del propio cuerpo que producen el efecto contrario a la inclinación, retomando el equilibrio. Por el contrario, en el aprendizaje, dichos movimientos pueden provocar una inclinación en el mismo sentido que la original, perdiendo entonces el equilibrio.